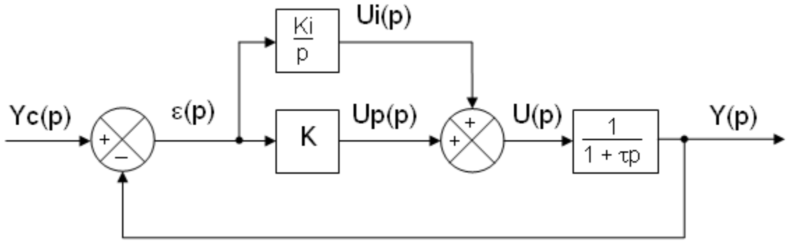
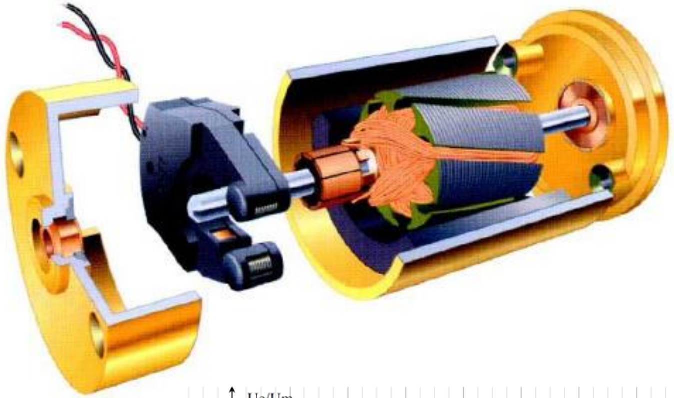
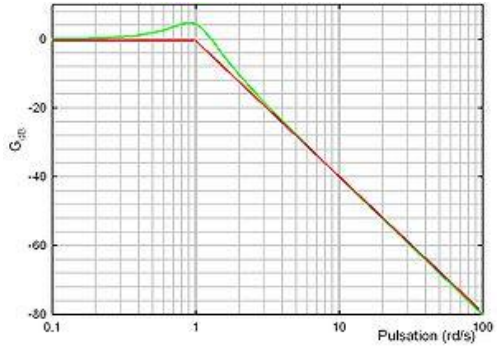
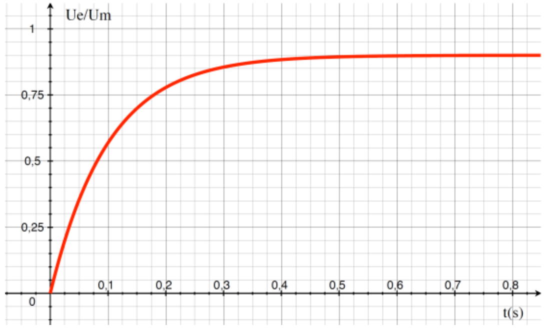
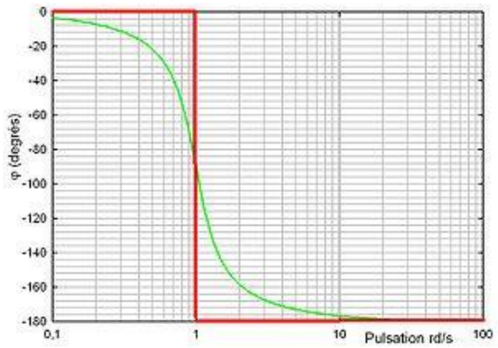
AUTOMATIQUE











3_Réponses temporelles

Compétences attendues :

- ✓ Etablir un modèle de comportement à partir d’une réponse temporelle ou fréquentielle. $\leftrightarrows I$
- ✓ Déterminer la réponse temporelle. $\leftrightarrows I$
- ✓ Simplifier un modèle.
- ✓ Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- ✓ Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- ✓ Déterminer les performances d’un système asservi.
- ✓ Analyser un algorithme. $\leftrightarrows I$

Introduction

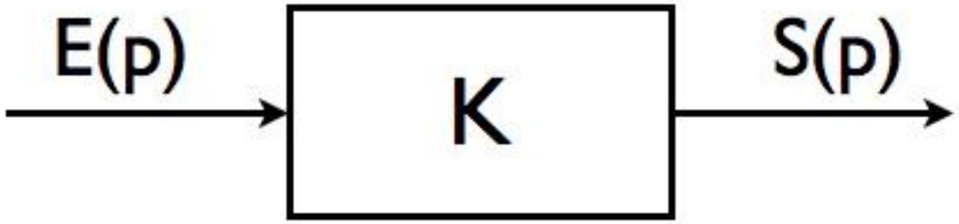
Il est intéressant de savoir reconnaître et interpréter ces résultats pour trois raisons :

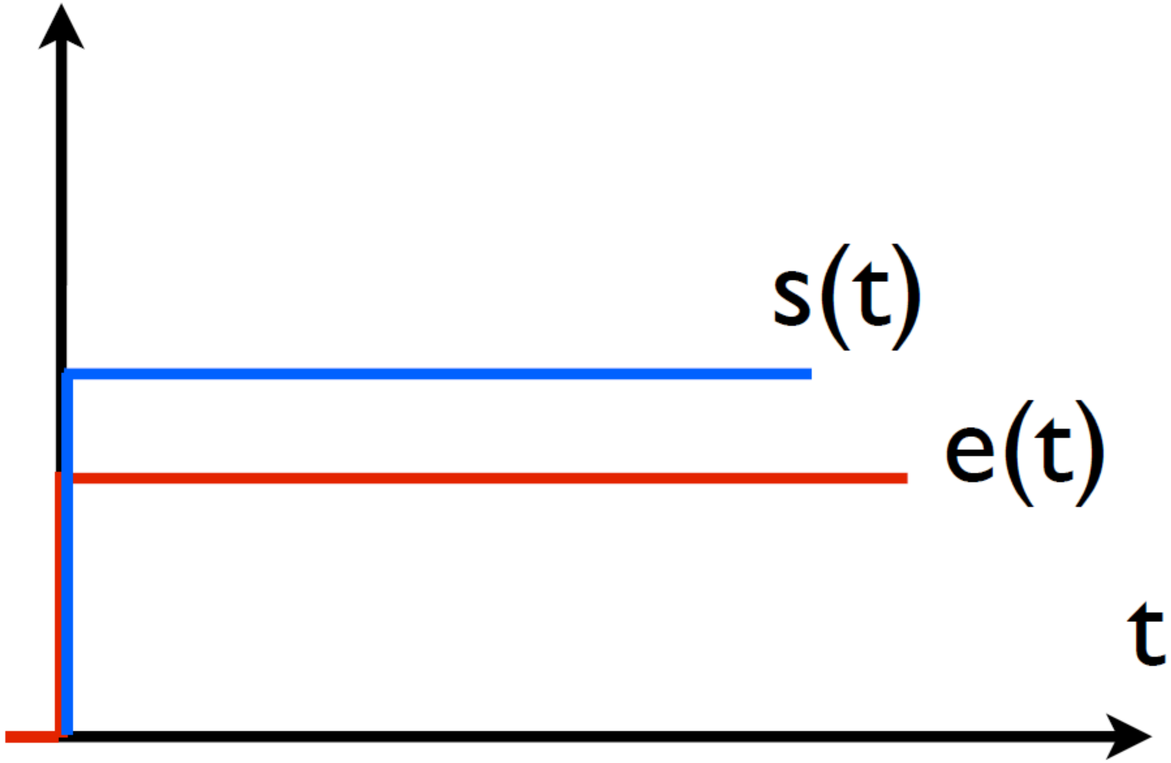
- **Recaler un modèle de connaissance** d'un système à partir d'une mesure
- **Etablir un modèle de comportement** d'un système complexe à partir d'une mesure
- **Déterminer les performances** d'un système

Systèmes à action proportionnelle

La sortie est proportionnelle à l'entrée. La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \; avec \; K \in \mathbb{R}^+$$





Systèmes intégrateurs

L'équation d'un tel système dans le domaine temporel s'écrit : $\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$.

On a donc comme fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

<u>Exemples :</u>

- Volume de liquide contenu dans un réservoir (= intégrale du débit rentrant)
- Charge d'un condensateur (= intégrale du courant de charge)
- Vitesse d'un mobile (= intégrale de son accélération)
- Position d'un axe (=intégrale de sa vitesse)

<u>Remarque :</u> De la même façon que les retards purs, les intégrateurs purs sont toujours associés à une autre fonction de transfert.

Systèmes intégrateurs

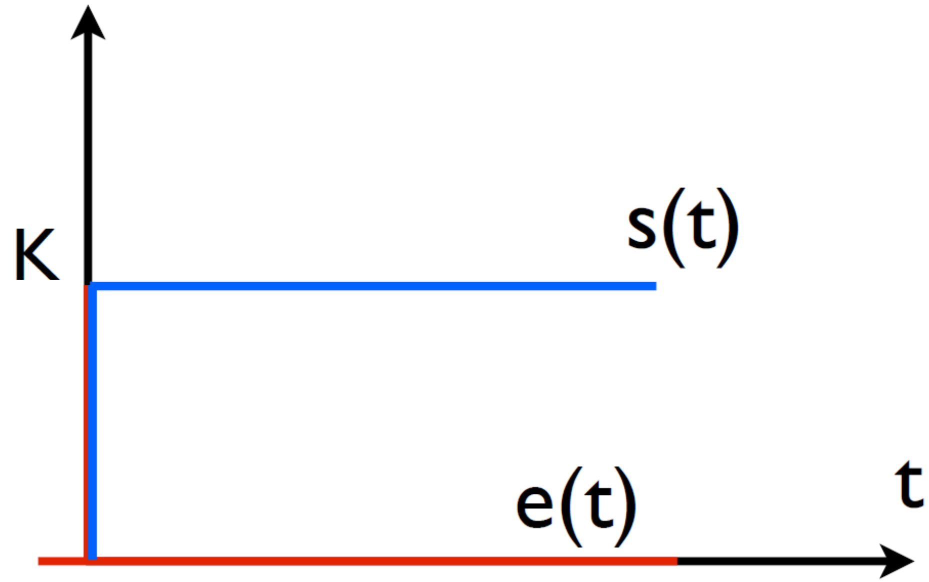
Réponse impulsionnelle

On soumet le système à une impulsion de Dirac (e(t) = $\delta(t)$) → Laplace → E(p) = 1.

L'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est alors :

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{p}.1$$

On a donc s(t) = K.u(t)



La réponse impulsionnelle d'un système intégrateur est **un échelon**.

Systèmes intégrateurs

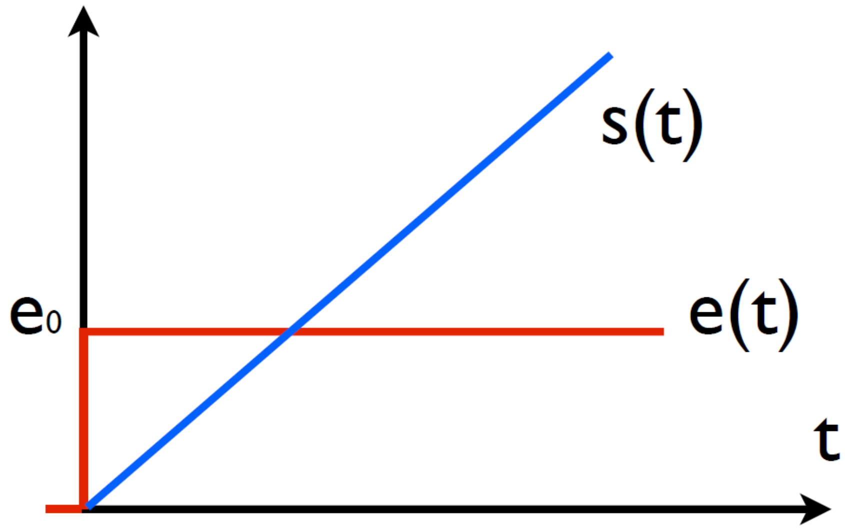
Réponse indicielle

$e(t) = e_0 u(t)$ ⟶ $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{p}.\frac{e_0}{p}$$

On a donc $s(t) = K.e_0.t.u(t)$

La réponse indicielle d'un système intégrateur est **une rampe**.



Systèmes du premier ordre

Rappels

Système du 1^{er} ordre $\Rightarrow$ $\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$

Avec

- K → gain statique du système
- τ → constante de temps du système

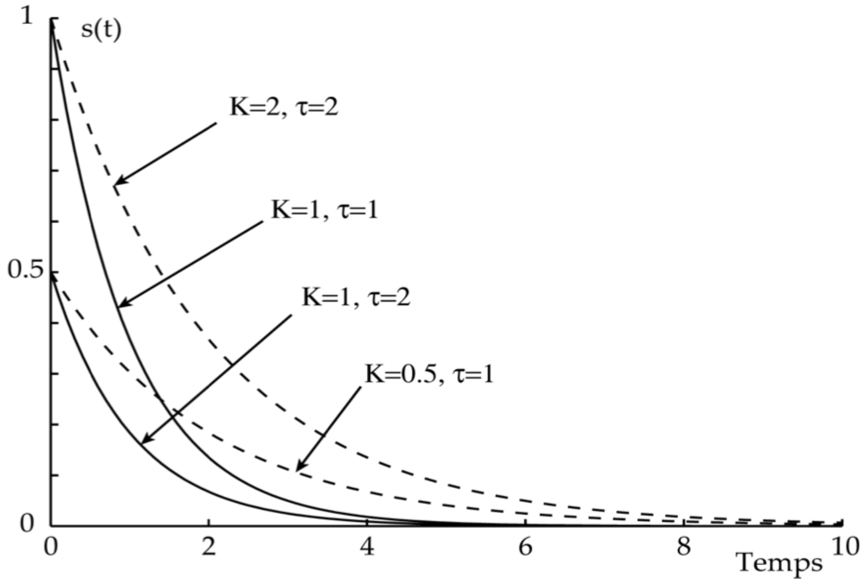
Laplace
+ Conditions d'Heaviside $\Rightarrow$ $(\tau p + 1).S(p) = K.E(p)$

Donc

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Systèmes du premier ordre

Réponse impulsionnelle



e(t) = $\delta(t)$ ⟹ $E(p) = 1$

Laplace ⟹ $S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1+\tau p}.1$

Réponse temporelle ⟹ $s(t) = \frac{K}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} u(t)$

Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle

e(t) = $e_0 u(t)$ ⟹ $E(p) = \frac{e_0}{p}$

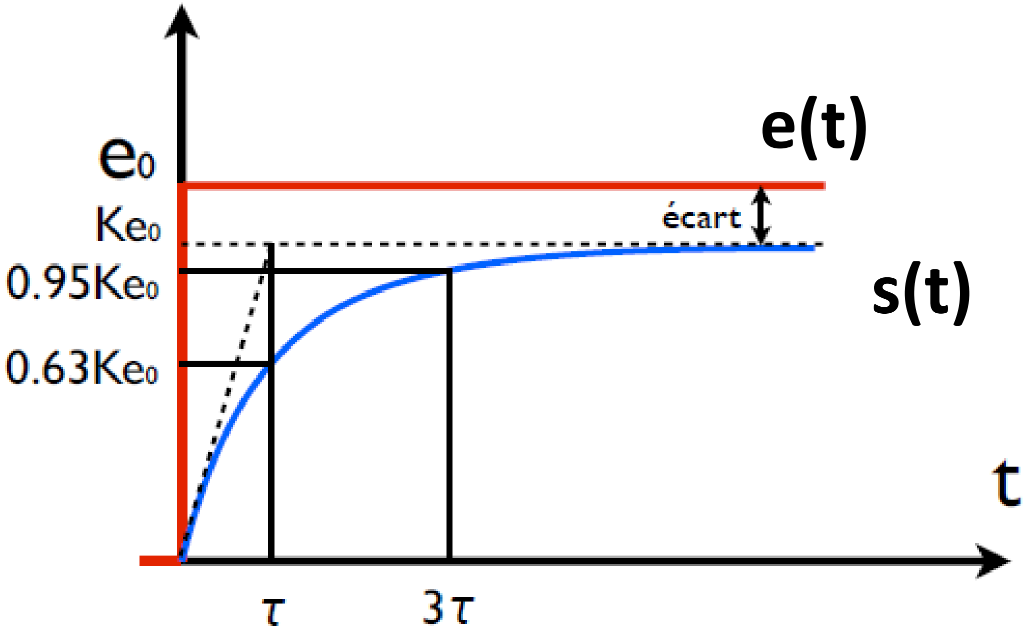
Démonstration

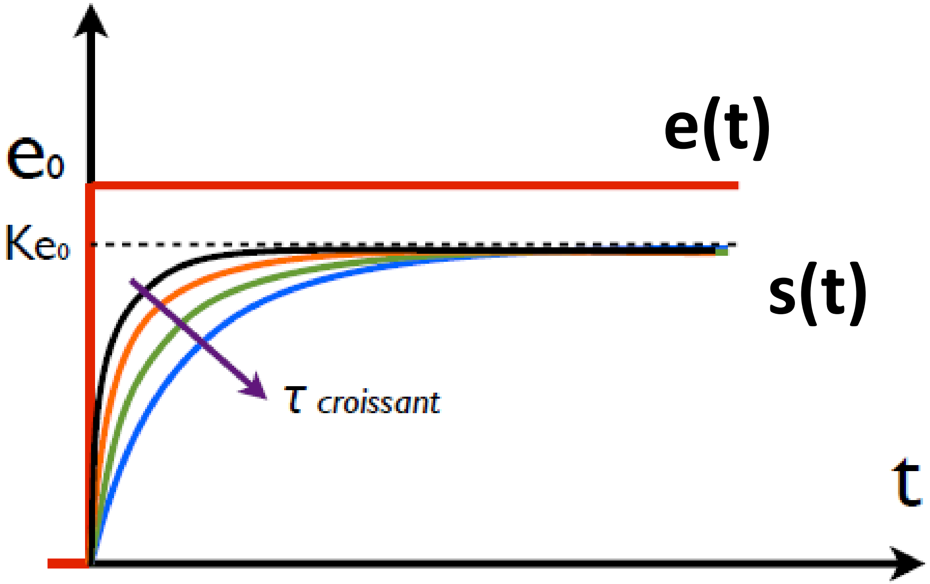
Laplace ⟹ $S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1+\tau p}.\frac{e_0}{p}$

Réponse temporelle ⟹ $s(t) = Ke_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right).u(t)$

Systèmes du premier ordre

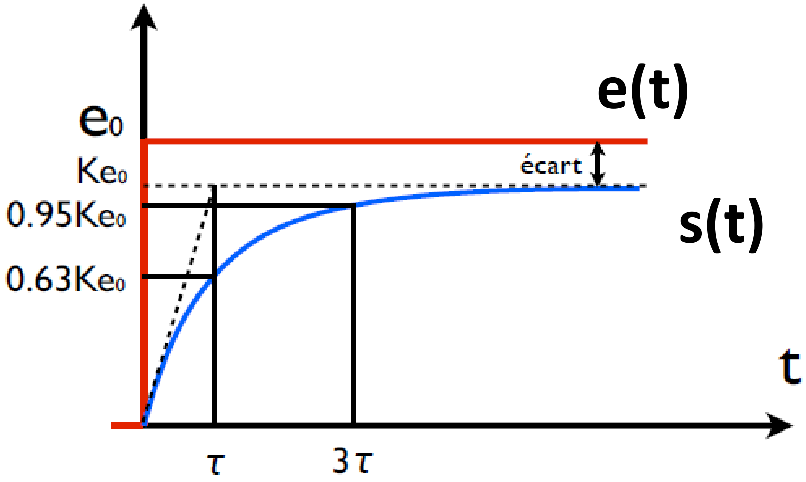
Réponse indicielle





Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle



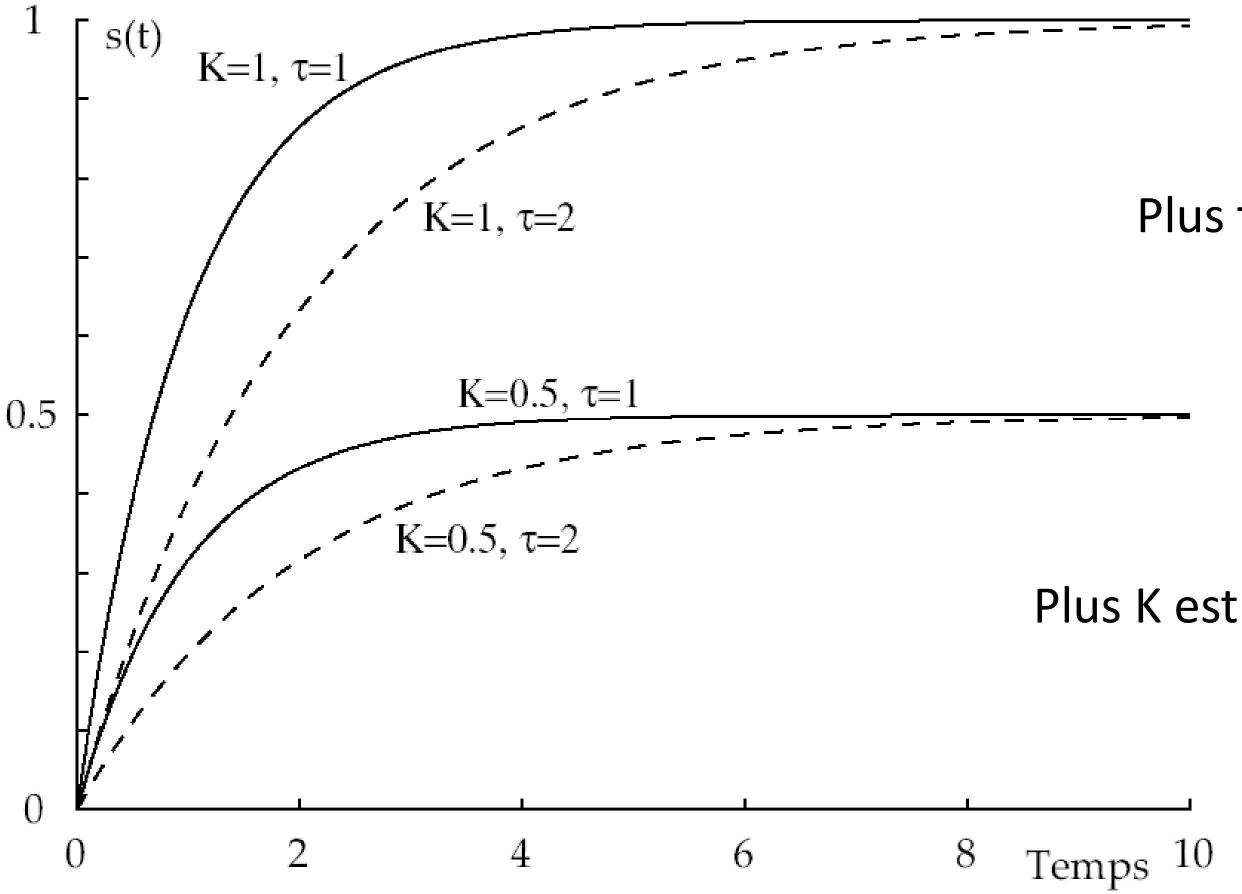
Propriétés remarquables des courbes :

- **Pas de dépassement**
- **Gain statique K → comportement du système en régime permanent :** $\boldsymbol{s_\infty = K.e_0}$
- **Pente à l'origine non nulle :** $\boldsymbol{\frac{ke_0}{\tau}}$
- **Ecart statique (en utilisant le théorème de la valeur finale sur S(p)) :** $\boldsymbol{\varepsilon_s = e_0(1-K)}$
  Le système est précis si K=1
- Pour $t = \tau, s(t) = 63\%. s_\infty$
- **Pour** $\boldsymbol{t = 3\tau, s(t) \cong s(t_{5\%}) = 95\%. s_\infty}$
- **Plus** $\boldsymbol{\tau}$ **est petit, plus le système est rapide**

Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle

Influence des paramètres caractéristiques



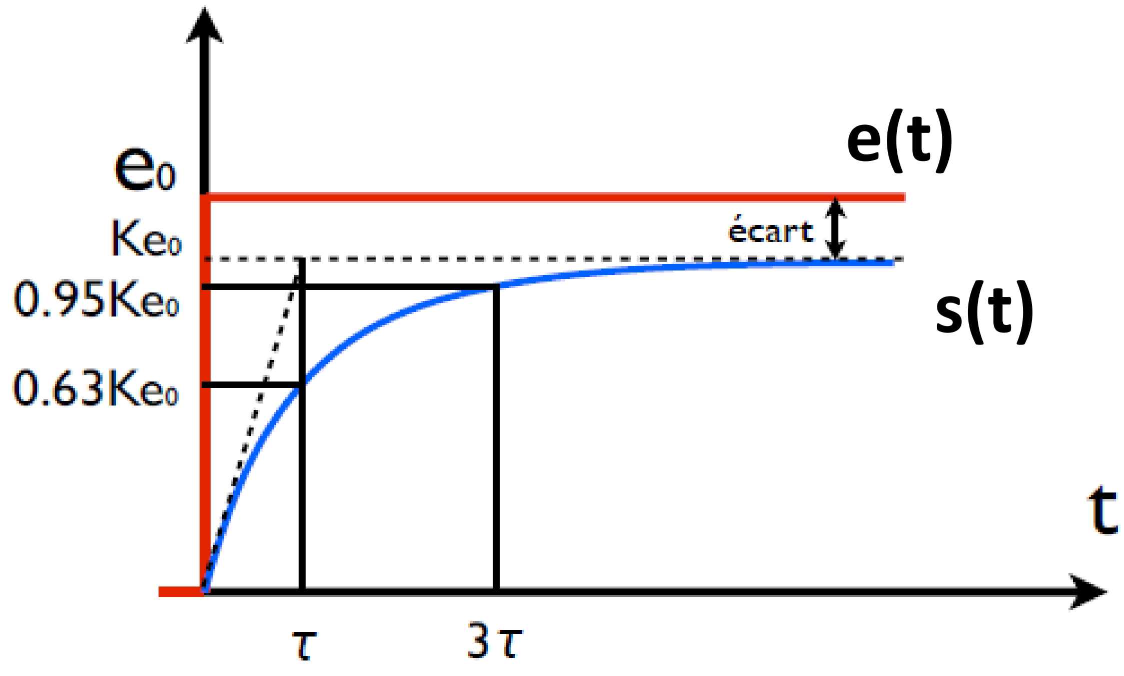
Plus τ est faible, plus le système est rapide.

Plus K est proche de 1, plus le système est précis.

Systèmes du premier ordre

Réponse indicielle

Identification temporelle



Détermination de K :

- Valeur asymptotique de la courbe qui vaut Ke_0 permet de déterminer K

Détermination de τ (3 méthodes) :

- τ correspond au temps pour lequel la sortie vaut 63% de sa valeur asymptotique,
- **La sortie atteint 95% de sa valeur asymptotique pour t = 3τ ,**
- **La tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant t = τ .**

Systèmes du premier ordre

Réponse à une rampe

e(t) = $\mathrm{a.t.u}(t)$ ⟹ $E(p) = \frac{a}{p^2}$

Laplace ⟹ $S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1+\tau p}.\frac{a}{p^2}$

Réponse temporelle ⟹ $s(t) = aK\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)$

Systèmes du premier ordre

Réponse à une rampe

- Si K = 1 : écart constant en régime permanent → $\varepsilon_v = a\tau$. (La sortie suit l'entrée avec un retard τ).

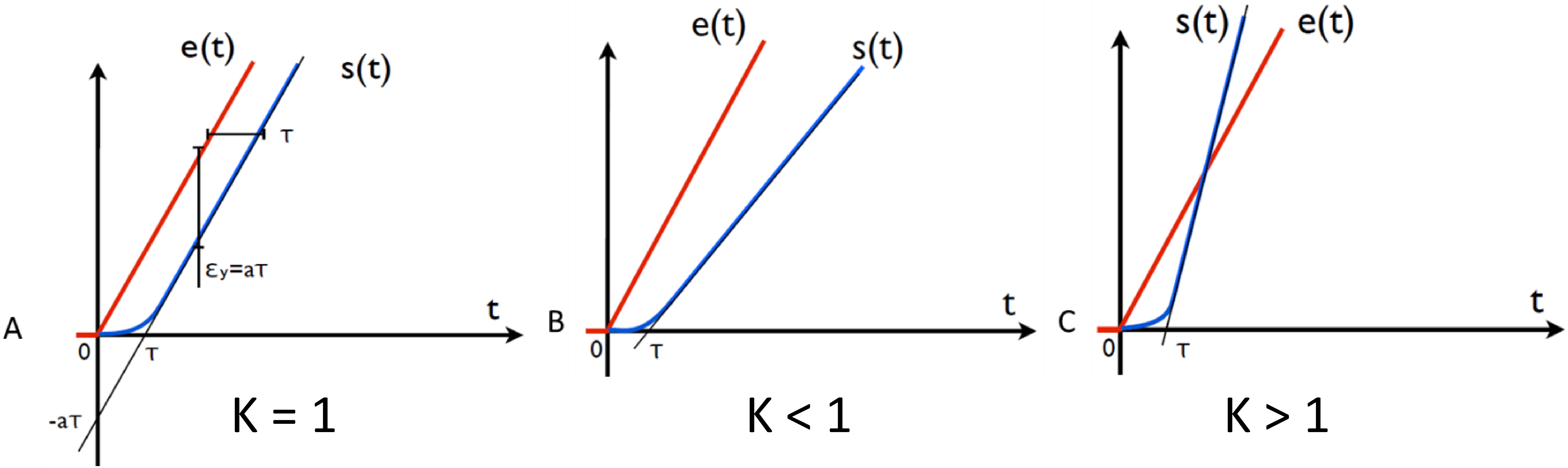
- Si K ≠ 1 : La réponse tend vers la droite d'équation $y = K.a.(t - \tau)$

- K < 1 → ε_v augmente en permanence

- K > 1 → ε_v s'annule pour une valeur particulière de t, puis croît indéfiniment

Systèmes du premier ordre

Réponse à une rampe



Systèmes du deuxième ordre

Rappels

Système du 2nd ordre ⇒ $$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=Ke(t)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\omega_0}$ → **pulsation propre non amortie du système**
- $\boldsymbol{z}$ → **coefficient d'amortissement du système** (ou ξ)
- **K → gain du système.**

Laplace
+ Conditions d'Heaviside ⇒ $$\boldsymbol{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2z\omega_0 p+\omega_0^2}=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Systèmes du deuxième ordre

Rappels

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1).$

<u>3 cas possibles :</u>

- z > 1 : deux pôles réels : **régime apériodique**,
- z =1 : un pôle double : **régime apériodique critique**,
- z < 1 : deux pôles complexes conjugués : **régime pseudo-périodique** (ou oscillant ou sous amorti).

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : z > 1

$$p_{1,2} = \omega_0\left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) < 0, \qquad avec\ H(p) = \frac{K{\omega_0}^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : z > 1

Réponse impulsionnelle

e(t) = $\delta(t)$ ⇒ $E(p) = 1$

Laplace ⇒ $S(p) = \frac{K{\omega_0}^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$ $\xrightarrow{\text{D.E.S.}}$ $S(p) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2})$

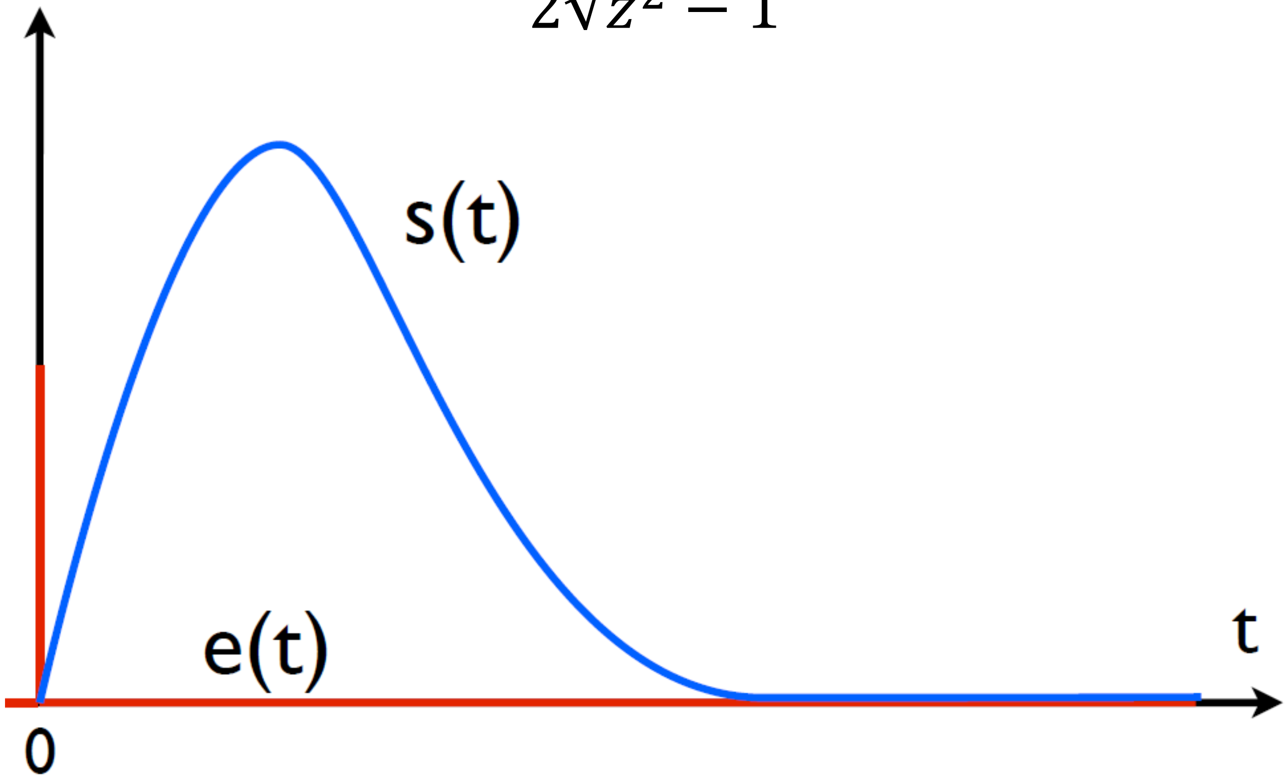
Réponse temporelle ⇒ $s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).u(t)$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : z > 1

Réponse impulsionnelle

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right).u(t)$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : z > 1

Réponse indicielle

e(t) = $e_0 u(t)$ ⟶ $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$

Laplace ⟶ $S(p) = \dfrac{Ke_0{\omega_0}^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$ $\xrightarrow{\text{D.E.S.}}$ $S(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-p_1} + \dfrac{C}{p-p_2}$

Avec $A = Ke_0$; $B = \dfrac{Ke_0{\omega_0}^2}{p_1(p_1-p_2)}$ et $C = -\dfrac{Ke_0{\omega_0}^2}{p_2(p_1-p_2)}$

Réponse temporelle ⟶ $s(t) = Ke_0\left[1 - \dfrac{\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\dfrac{e^{p_1 t}}{p_1} - \dfrac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right].u(t)$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : z > 1

Réponse indicielle

$$s(t) = Ke_0\left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right].u(t)$$

Signes particuliers du régime apériodique :

- temps de réponse à 5% → ~~formule simple~~
- Si un des pôles est très petit devant l'autre → assimiler le système à un premier ordre.

Si $p_1 \gg p_2$, alors le pôle p_2 (inverse de la constante de temps τ_2) est dit dominant.
→ premier ordre de constante de temps τ_2

$$s(t) \cong Ke_0\left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}}\right).u(t)$$

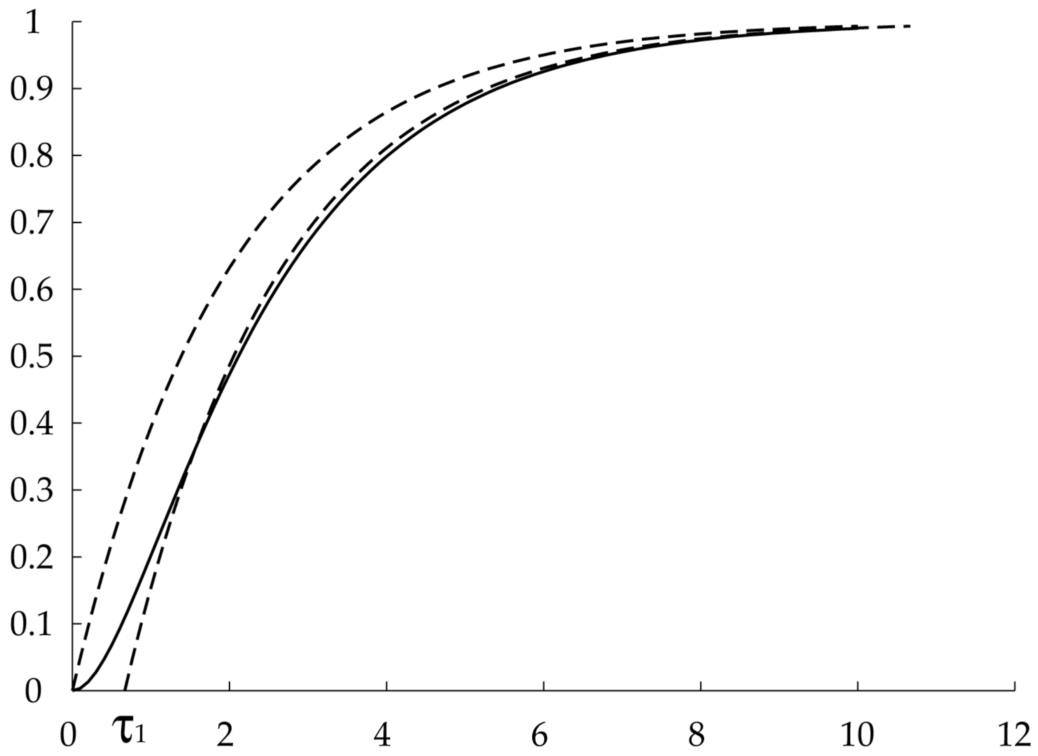
Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique : z > 1

Réponse indicielle

$$s(t) = Ke_0\left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right].u(t)$$

$$\boxed{s(t) \cong Ke_0\left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}}\right).u(t)}$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : z = 1

Un pôle double : $p_{1,2} = -z\omega_0 = -\omega_0$

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : z = 1

Réponse impulsionnelle

e(t) = $\delta(t)$ ⇒ $E(p) = 1$

Laplace ⇒ $S(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2}.E(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2}$

Réponse temporelle ⇒ $s(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}.u(t)$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : z = 1

Réponse indicielle

e(t) = $e_0 u(t)$ $\Rightarrow$ $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$

Laplace $\Rightarrow$ $S(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2}.E(p) = \dfrac{Ke_0\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2}$

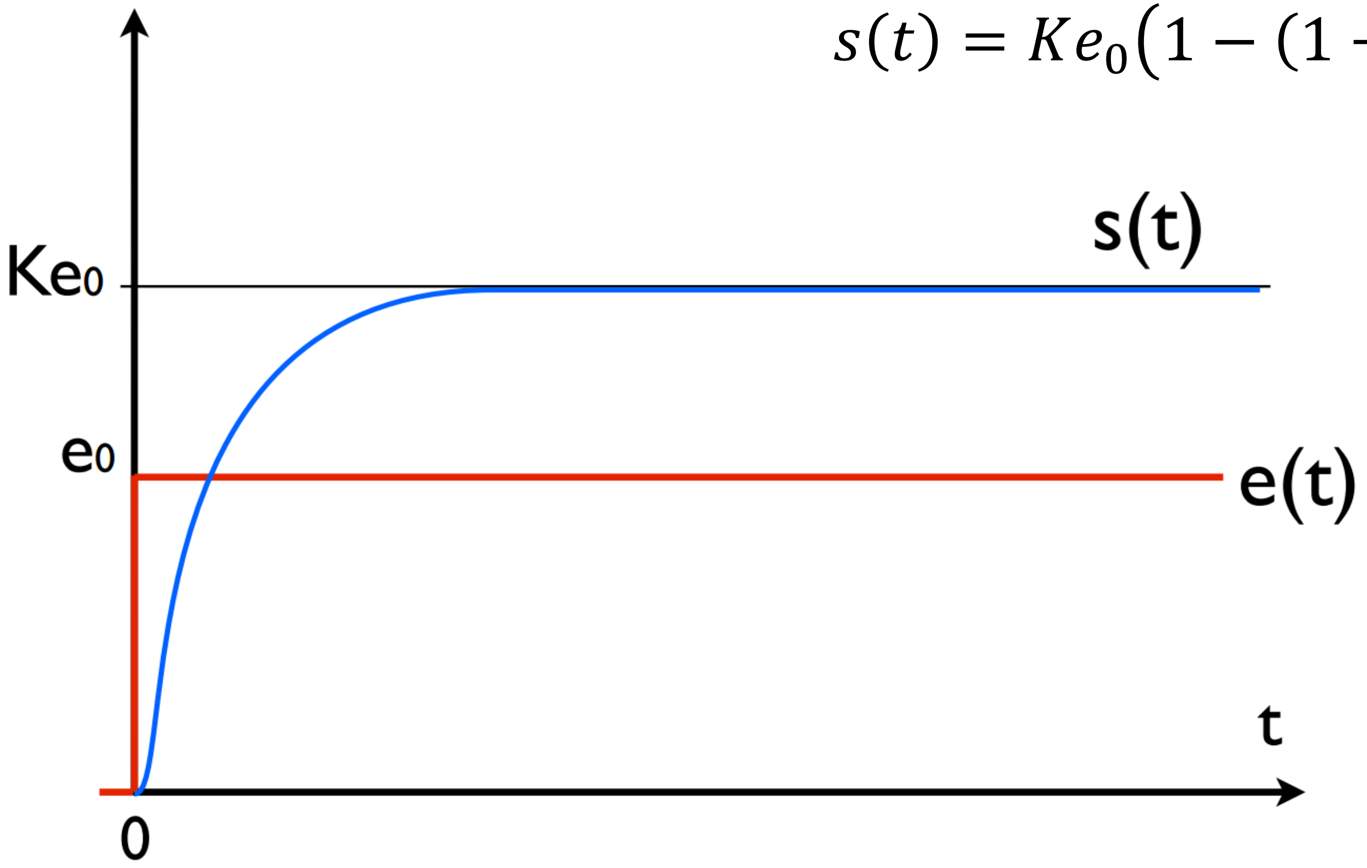
Réponse temporelle $\Rightarrow$ $s(t) = Ke_0\left(1-(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right).u(t)$

Systèmes du deuxième ordre

Régime apériodique critique : z = 1

Réponse indicielle

$$s(t) = Ke_0\left(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right).u(t)$$



- Temps de réponse à 5% → ~~formule simple~~
- ~~Dépassement~~

Remarques :

- La courbe possède la même allure générale que pour le cas z >1, comme si l'on avait deux constantes de temps identiques.
- Ce cas n'existe pas physiquement, car on ne peut réaliser parfaitement z =1.

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Deux pôles complexes conjugués : $p_{1,2} = \omega_0(-z \pm i\sqrt{1 - z^2})$

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{\left(p + z\omega_0\right)^2 + (\omega_0\sqrt{1 - z^2})^2}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Réponse impulsionnelle

e(t) = $\delta(t)$ ⟹ $E(p) = 1$

Laplace ⟹ $S(p) = H(p).E(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2}$

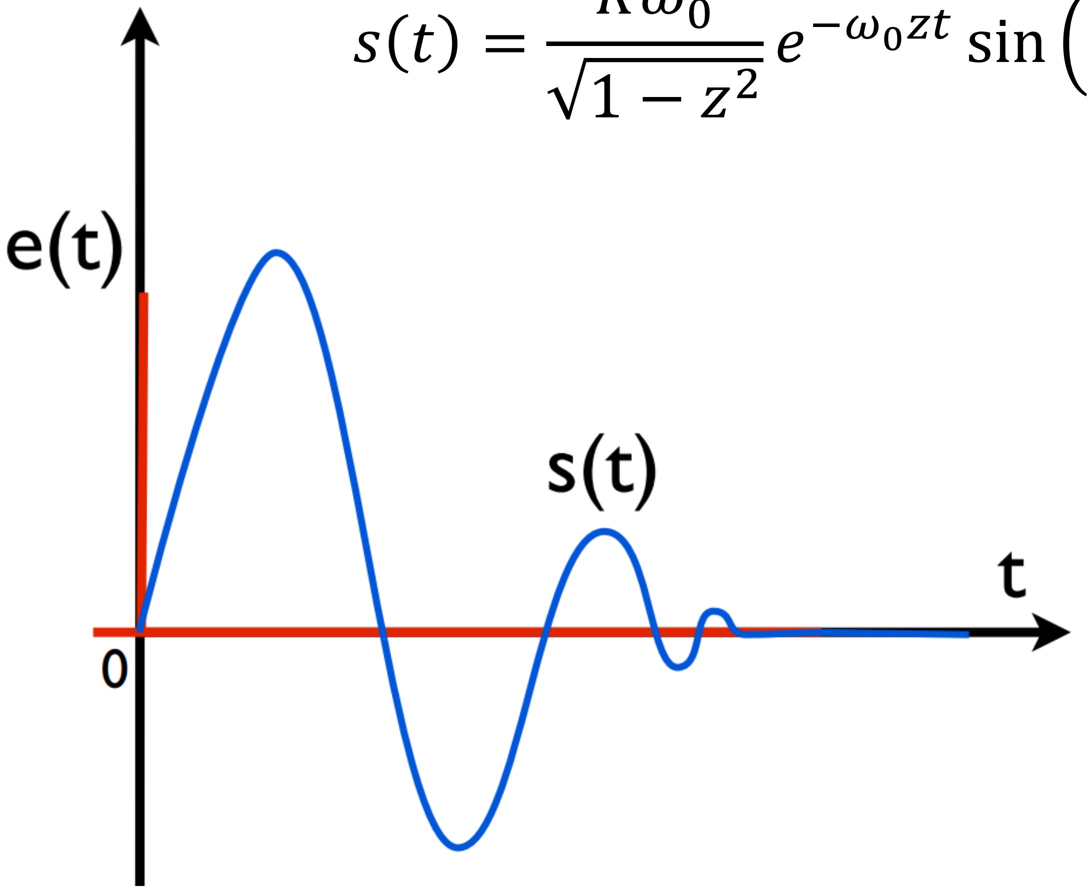
Réponse temporelle ⟹ $s(t) = \dfrac{K\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}t\right).u(t)$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Réponse impulsionnelle

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}t\right).u(t)$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Réponse indicielle

e(t) = $e_0 u(t)$ ⟹ $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$

Laplace ⟹ $S(p) = \dfrac{K e_0 \omega_0^2}{\left(p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2\right)p}$

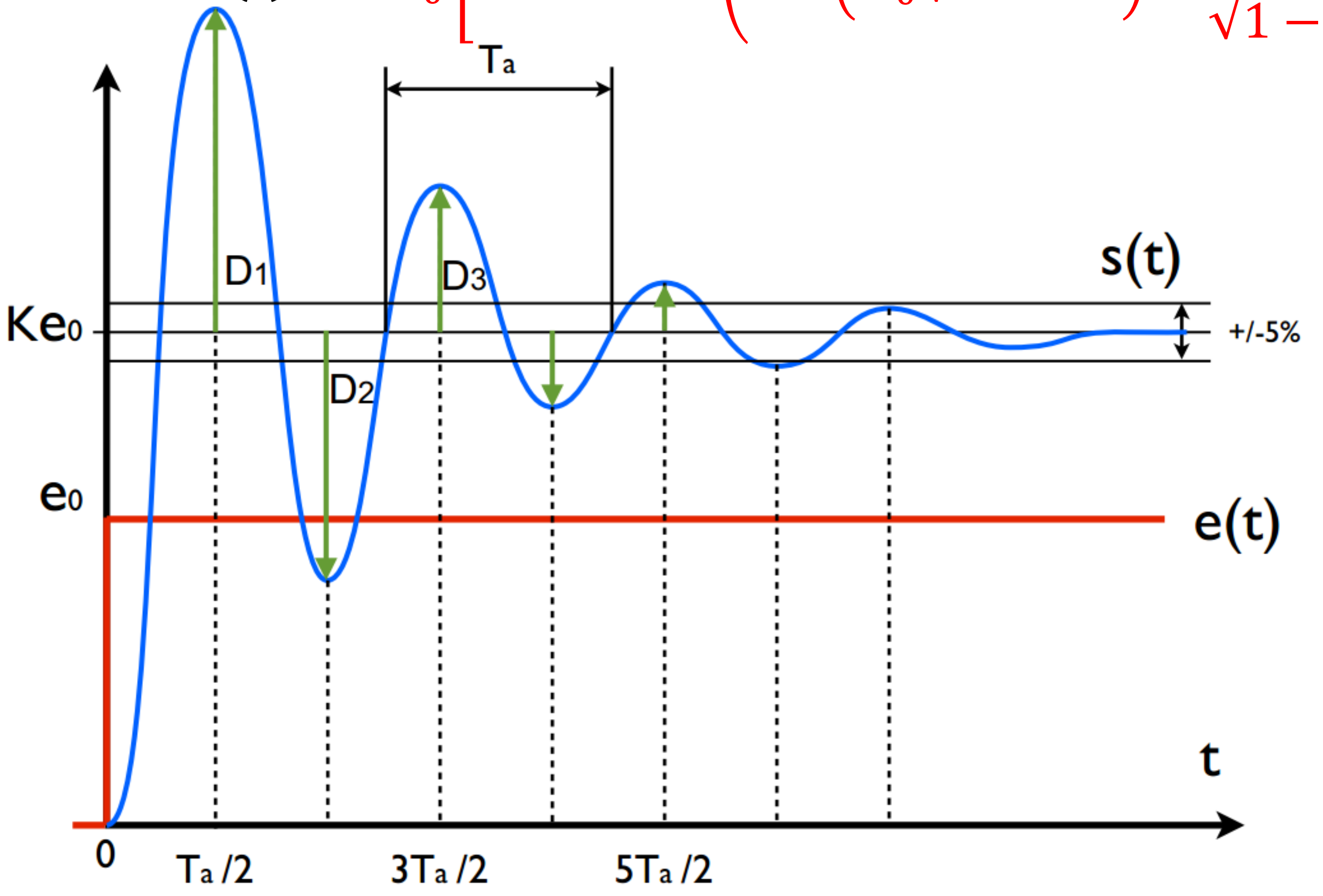
Réponse temporelle ⟹ $s(t) = K e_0 \left[1 - e^{-\omega_0 z t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t\right) + \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t\right)\right)\right].u(t)$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Réponse indicielle

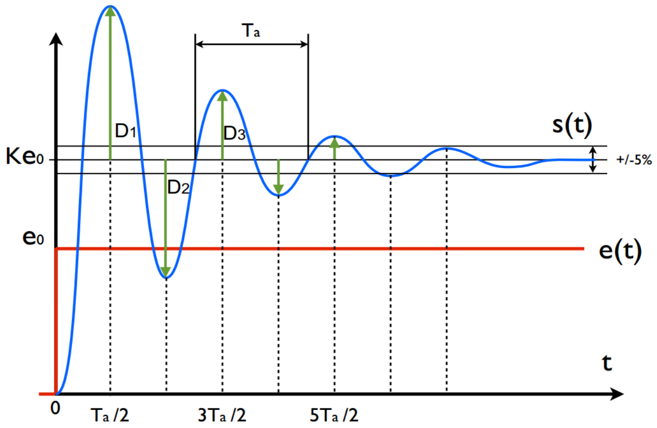
$$s(t) = Ke_0\left[1 - e^{-\omega_0 z t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}t\right) + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}t\right)\right)\right].u(t)$$



Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Réponse indicielle



- La réponse des **oscillations amorties** dont la période, appelée pseudo période est :

$$\boldsymbol{T_a = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_a}\ avec\ \omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}\ la\ pulsation\ amortie}$$

- **La pente à l'origine** est **nulle** : $(\lim_{t\to 0^+} s'(t) = 0\ \ donc\ \ pente\ nulle)$

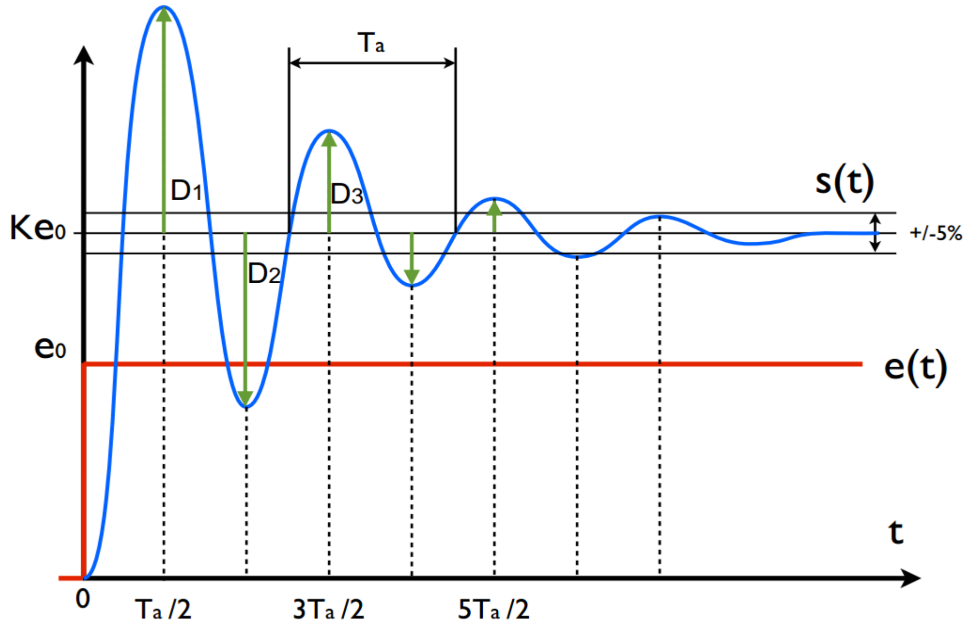
- **Les dépassements relatifs** pour les instants t_k tels que $s'(t_k) = 0$ ont pour valeur :

$$D_{k\%} = 100\frac{|s(t_k)-s(+\infty)|}{|s(+\infty)|} = 100.\, e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \quad \text{avec } t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

Réponse indicielle

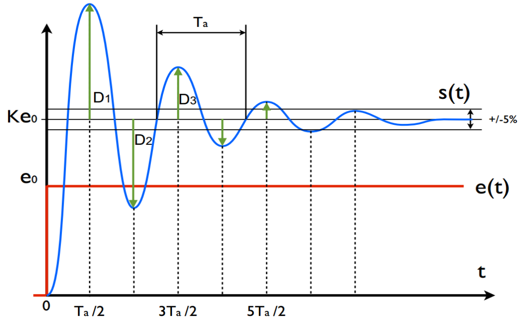


$$D_1 = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \quad soit \quad z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}$$

Systèmes du deuxième ordre

Régime pseudo-périodique : z < 1

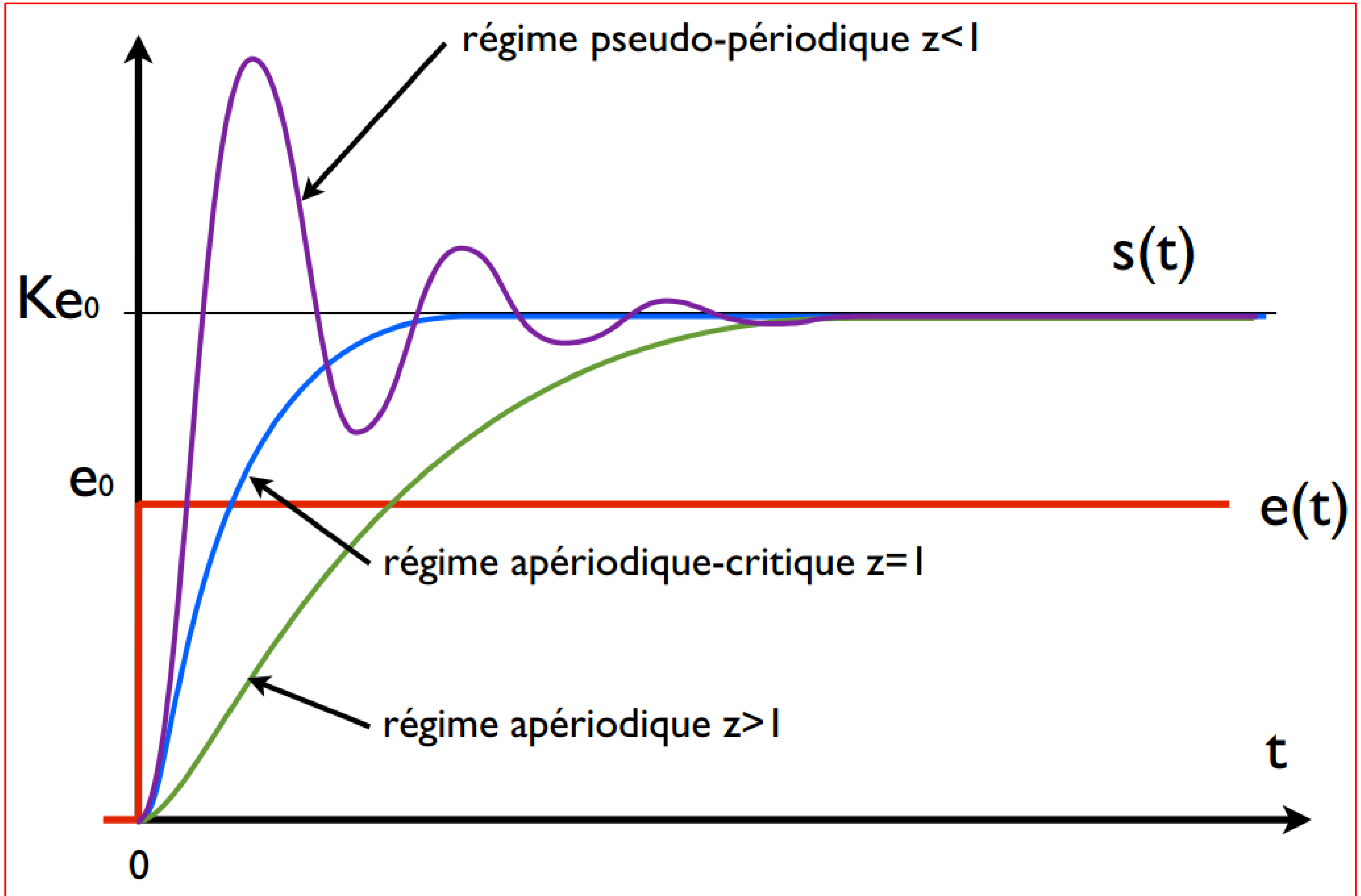
Réponse indicielle



Temps du 1^er dépassement	$t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$
Amplitude du 1^er dépassement	$D_{1\%} = 100.\,e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$
Pulsation amortie	$\omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}$
Pseudo-période	$T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \dfrac{2\pi}{\omega_a}$
Coefficient d'amortissement	$\boldsymbol{z} = \sqrt{\dfrac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}$

Systèmes du deuxième ordre

Bilan sur les réponses indicielles



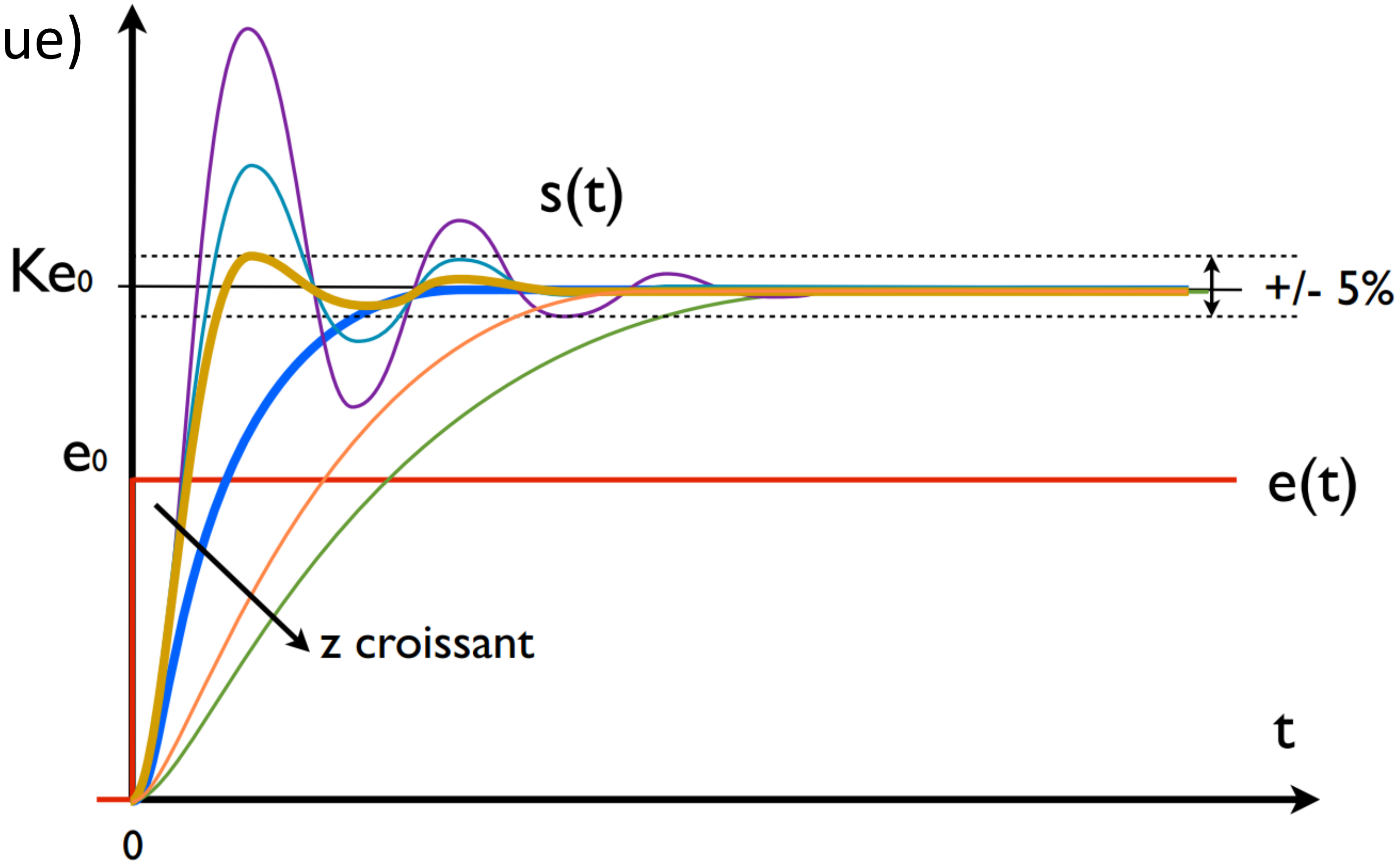
Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Coefficient d'amortissement z (ou ξ)

Pour z < 1 (régime pseudo-périodique)

- z = 1 : réponse apériodique critique
- z ≈ 0,7 : réponse optimisant le temps de réponse à 5% ($D_{1\%}$ = 5% . Ke_0).

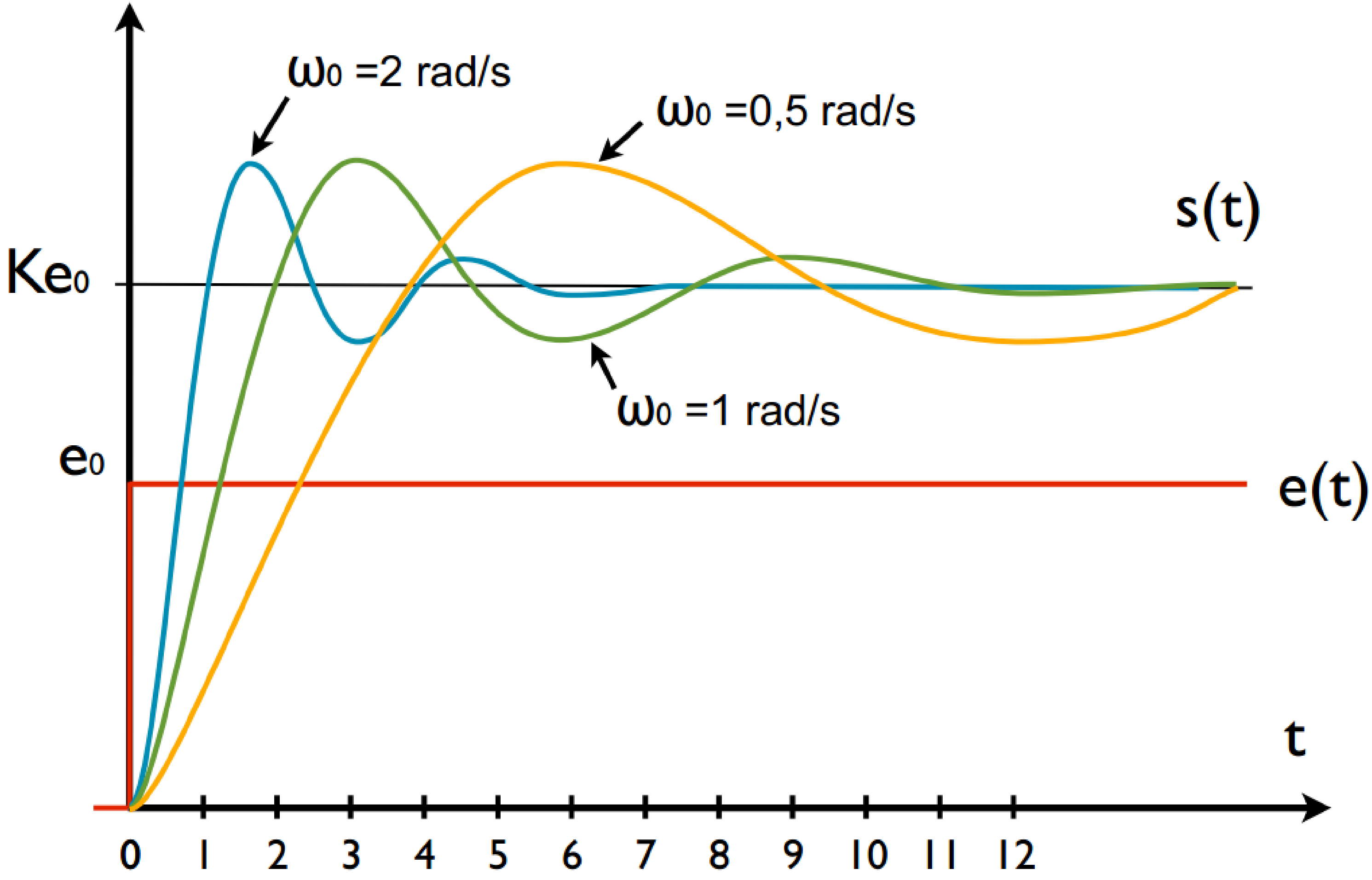


Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Pulsation propre ω_0

ω_0 → ~~modifie~~ → amplitude des dépassements

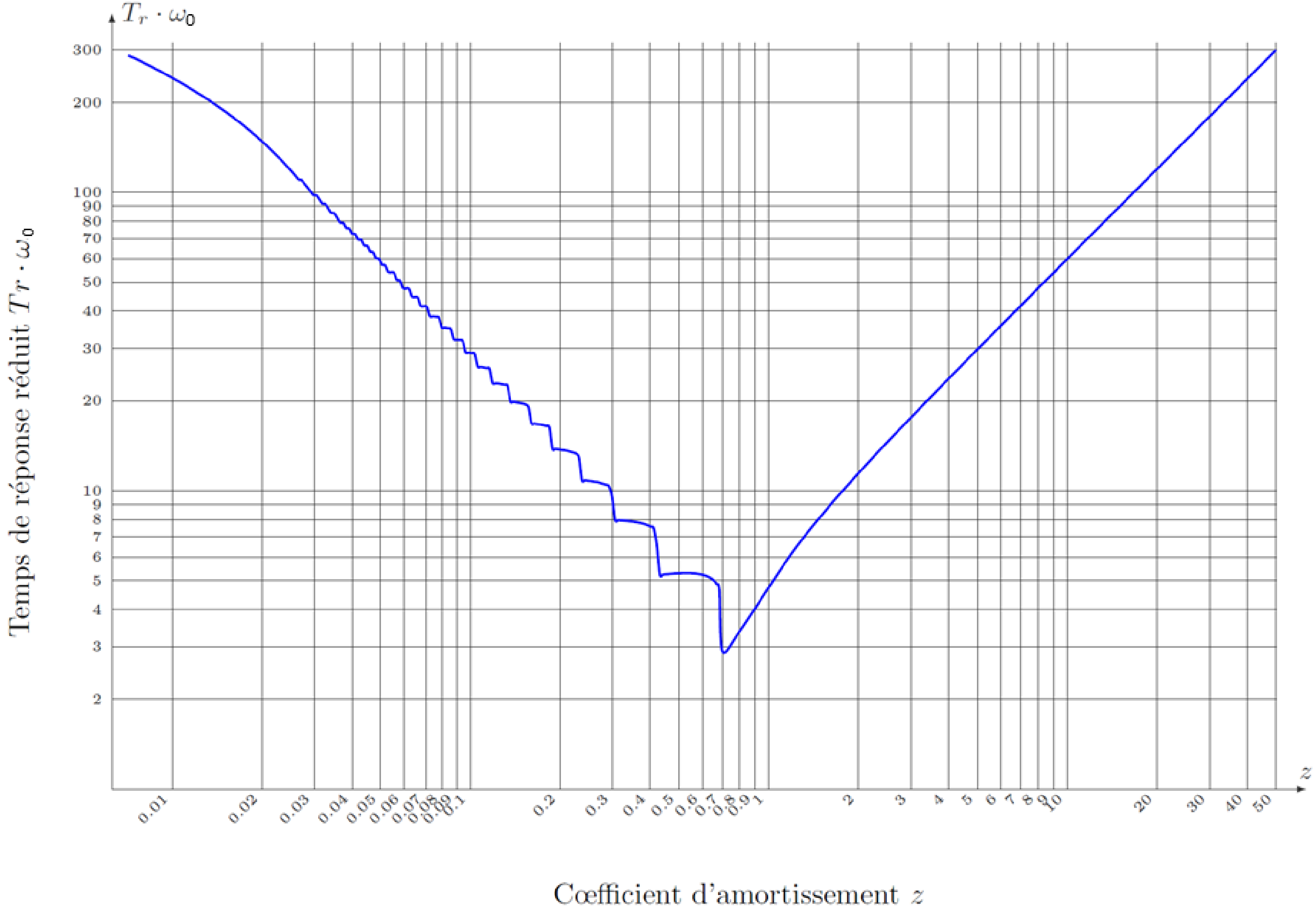


Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Détermination du temps de réponse à 5%

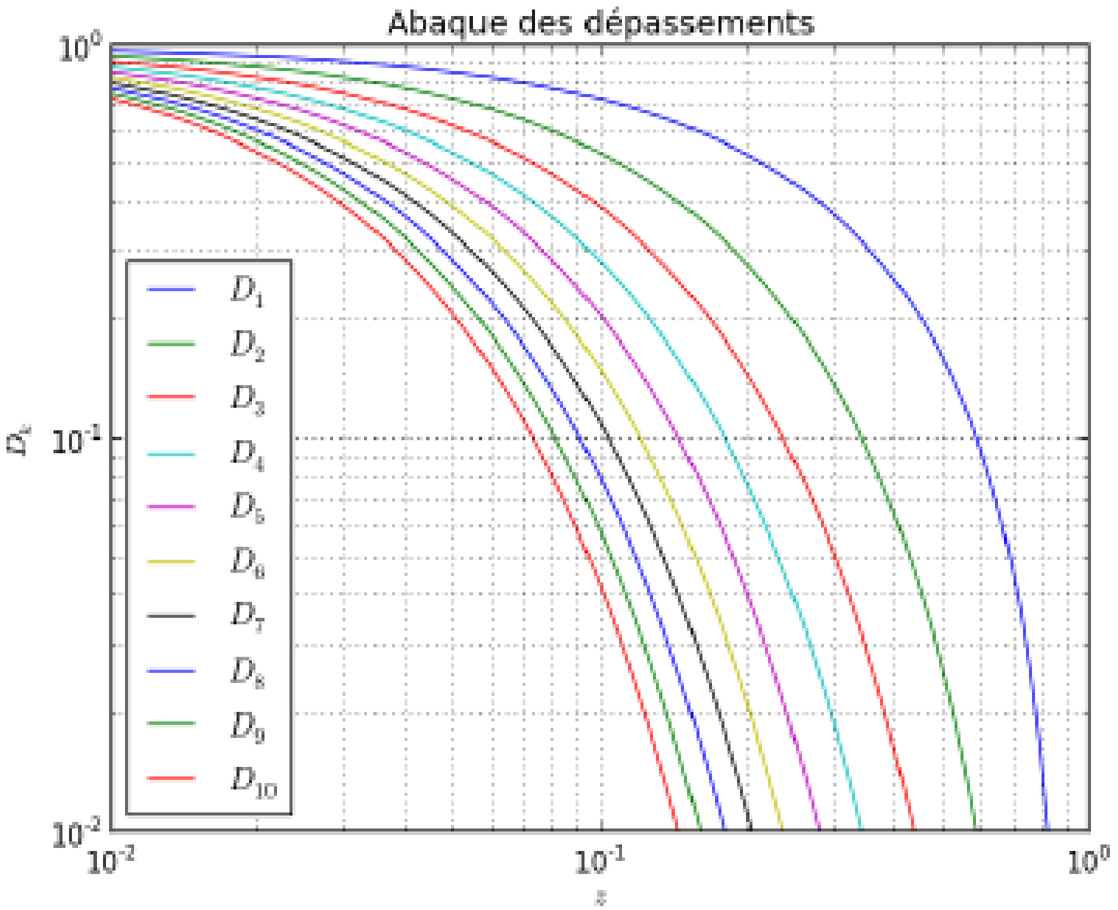
- Temps de réponse réduit ($\mathbf{t_{5\%}}.\boldsymbol{\omega_0}$)



Systèmes du deuxième ordre

Influence des paramètres caractéristiques

Abaque des dépassements en fonction de z



$$D_{k\%} = 100\frac{|s(t_k) - s(+\infty)|}{|s(+\infty)|} = 100.e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Avec $$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Dépassements relatifs → dépendent → que de z

Systèmes du deuxième ordre

Tracé des courbes et abaques sur Python (module *matplotlib*)

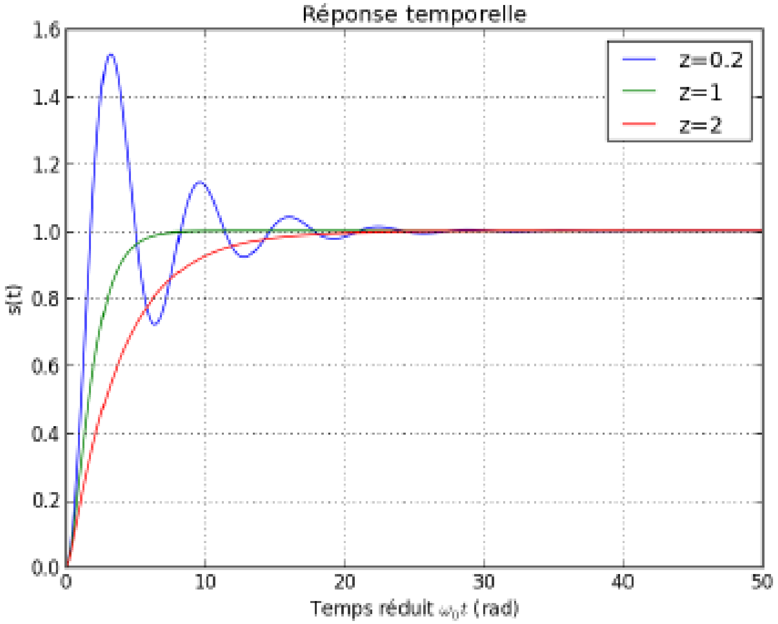
```
def Discretisation(a,b,n):
    return [a+k*(b-a)/n for k in range(n)]

Liste_wot = Discretisation(0,50,1000)
```

```
def Solution(w0t,z):
    if z>1:
        a=ma.sqrt(z**2-1)
        return 1-(1+z/a)*ma.exp(-w0t*(z-a))/2-(1-z/a)*ma.exp(-w0t*(z+a))/2
    elif z==1:
        return 1-(1+w0t*z)*ma.exp(-w0t*z)
    else:
        a = ma.sqrt(1-z**2)
        phi = ma.atan(a/z)
        return 1-ma.exp(-w0t*z)*ma.sin(w0t*a+phi)/ma.sin(phi)
```

$$s(t)=\begin{cases} 1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)e^{-\omega_0 t\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)e^{-\omega_0 t\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)} & \text{si } z>1 \\ 1-(1+\omega_0 t z)\,e^{-\omega_0 t z} & \text{si } z=1 \\ 1-\frac{e^{-\omega_0 t z}}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-z^2}+\varphi\right) \text{ avec } \sin\varphi=\sqrt{1-z^2} \text{ et } \cos\varphi=z & \text{si } z<1 \end{cases}$$

```
def ReponseTemporelle(L,z):
    return [Solution(wot,z) for wot in L]
```

```
plt.figure() # Définition d'une nouvelle figure
for z in [0.2,1,2]:
    plt.plot(Liste_wot, ReponseTemporelle(Liste_wot,z),label='z='+str(z))
    # Graphes
plt.xlabel("Temps réduit $\omega_0t$ (rad)") # Légende de l'axe des abscisses
plt.ylabel("s(t)") # Légende de l'axe des ordonnées
plt.grid() # Affiche une grille
plt.legend(loc=1) # Affiche la légende
plt.title('Réponse temporelle') #Titre
plt.show() # Affichage de la figure
```

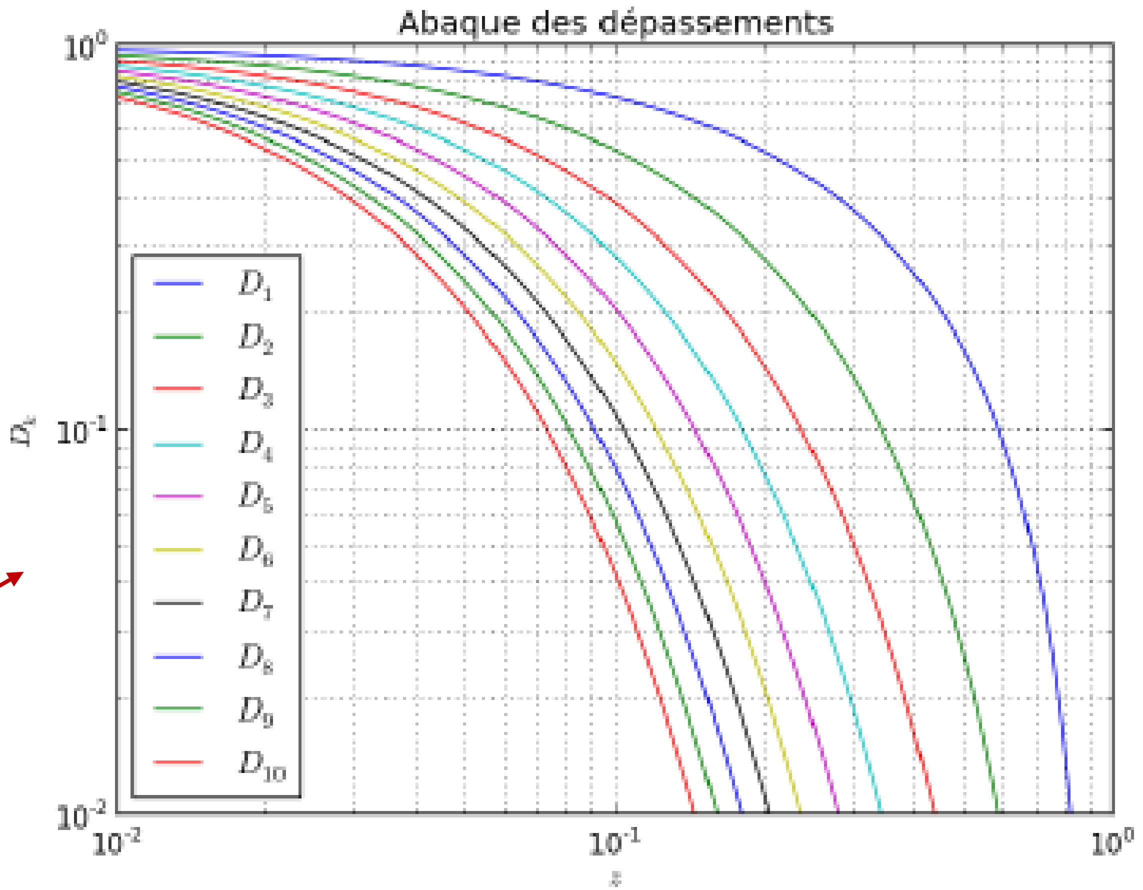


Systèmes du deuxième ordre

Bilan sur les réponses indicielles

```
def DiscretisationLog(a,b,n):
    return [10**x for x in Discretisation(a,b,n)]

Liste_z = DiscretisationLog(-2,1,500)
Liste_wot = Discretisation(0,150,1000)

def Depassement(k,L):
    return [ma.exp(-k*ma.pi*z/(ma.sqrt(1-z**2))) for z in L]
```

```
plt.figure()
plt.xscale('log') # Echelle logarithmique abscisses
plt.yscale('log') # Echelle logarithmique ordonnées
plt.xlim(.01,1)
plt.ylim(0.01,1)
for k in range(1,11):
    Liste_Dk = Depassement(k,Liste_z)
    plt.plot(Liste_z,Liste_Dk,label='$D_{'+str(k)+'}$')
plt.xlabel('$z$')
plt.ylabel('$D_k$')
plt.title("Abaque des dépassements")
plt.legend(loc=0)
plt.grid(which='both') # Affiche une grille
plt.show()
```

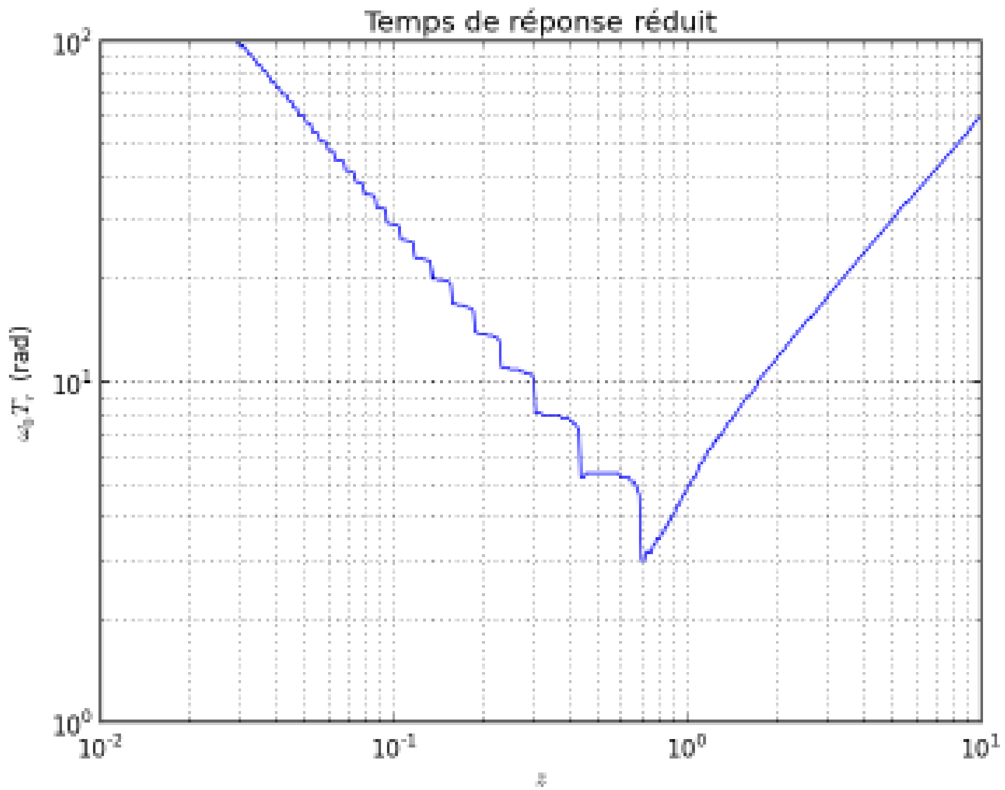


Systèmes du deuxième ordre

Bilan sur les réponses indicielles

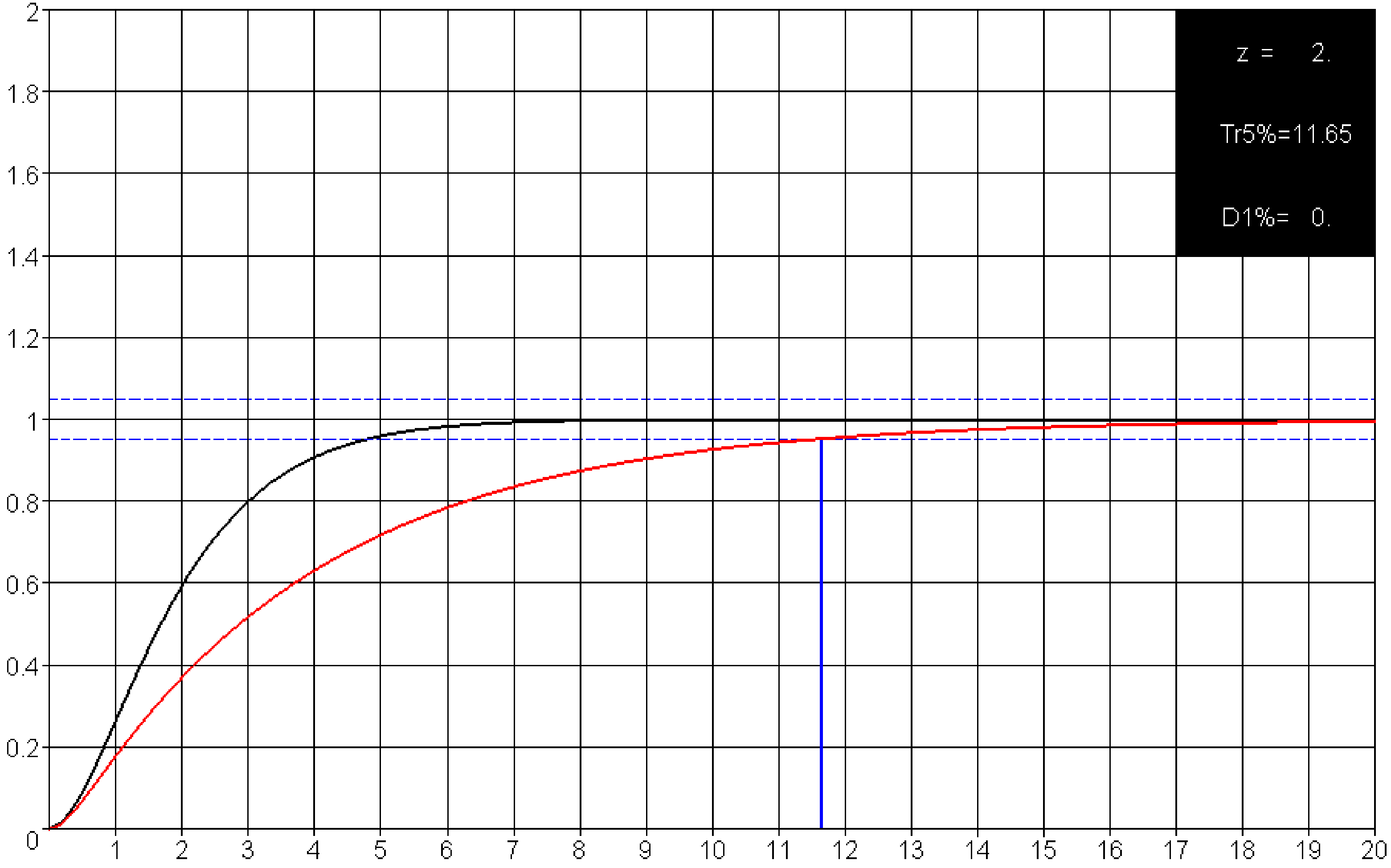
```
def EstDansLaBande(x):
    return x<=1.05 and x>=0.95

def TempsDeReponse(L,z):
    n=len(L)
    k=n-1
    Test = True
    while k>=0 and Test:
        if EstDansLaBande(Solution(L[k],z)):
            k = k-1
        else:
            Test = False
    return L[min(k+1,n-1)]

Liste_Treduit = [TempsDeReponse(Liste_wot,z) for z in Liste_z]
```

```
plt.figure()
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.xlim(.01,10)
plt.ylim(1,100)
plt.xlabel('$z$')
plt.ylabel('$\omega_0T_r$ (rad)')
plt.title("Temps de réponse réduit")
plt.grid(which='both')
plt.plot(Liste_z,Liste_Treduit)
plt.show()
```



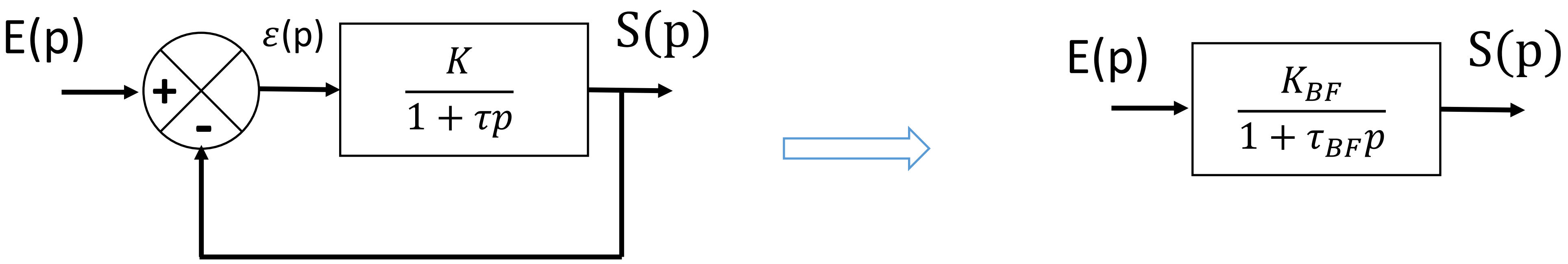
Systèmes du deuxième ordre

Bilan sur les réponses indicielles



Systèmes du 1er et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

FTBF d'un système du 1er ordre

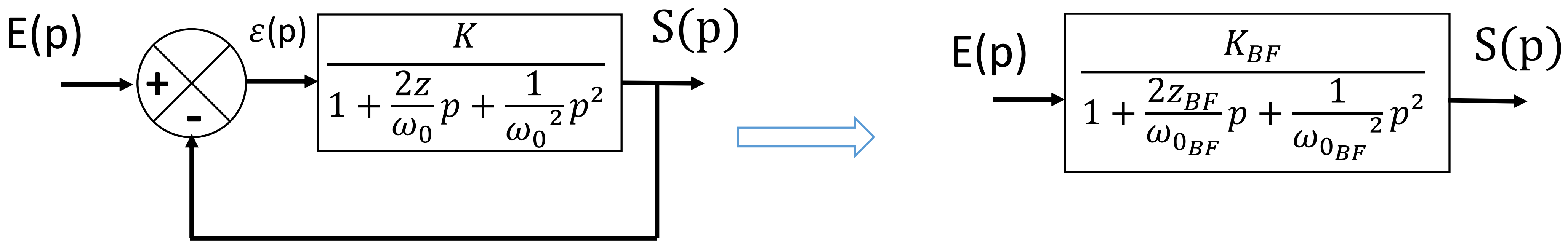


$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1+\frac{K}{1+\tau p}} = \frac{K}{1+\tau p+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{\tau}{1+K}p}$$

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K} < 1 \qquad \tau_{BF} = \frac{\tau}{1+K} < \tau$$

Systèmes du 1er et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

FTBF d'un système du 2nd ordre



$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}}{1+\dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}}=\frac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}+K}=\frac{\dfrac{K}{1+K}}{1+\dfrac{2z}{\omega_0(1+K)}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2(1+K)}}$$

$$K_{BF}=\frac{K}{1+K}<1 \qquad z_{BF}=\frac{z}{\sqrt{1+K}}<z \qquad \omega_{0_{BF}}=\omega_0\sqrt{1+K}>\omega_0$$

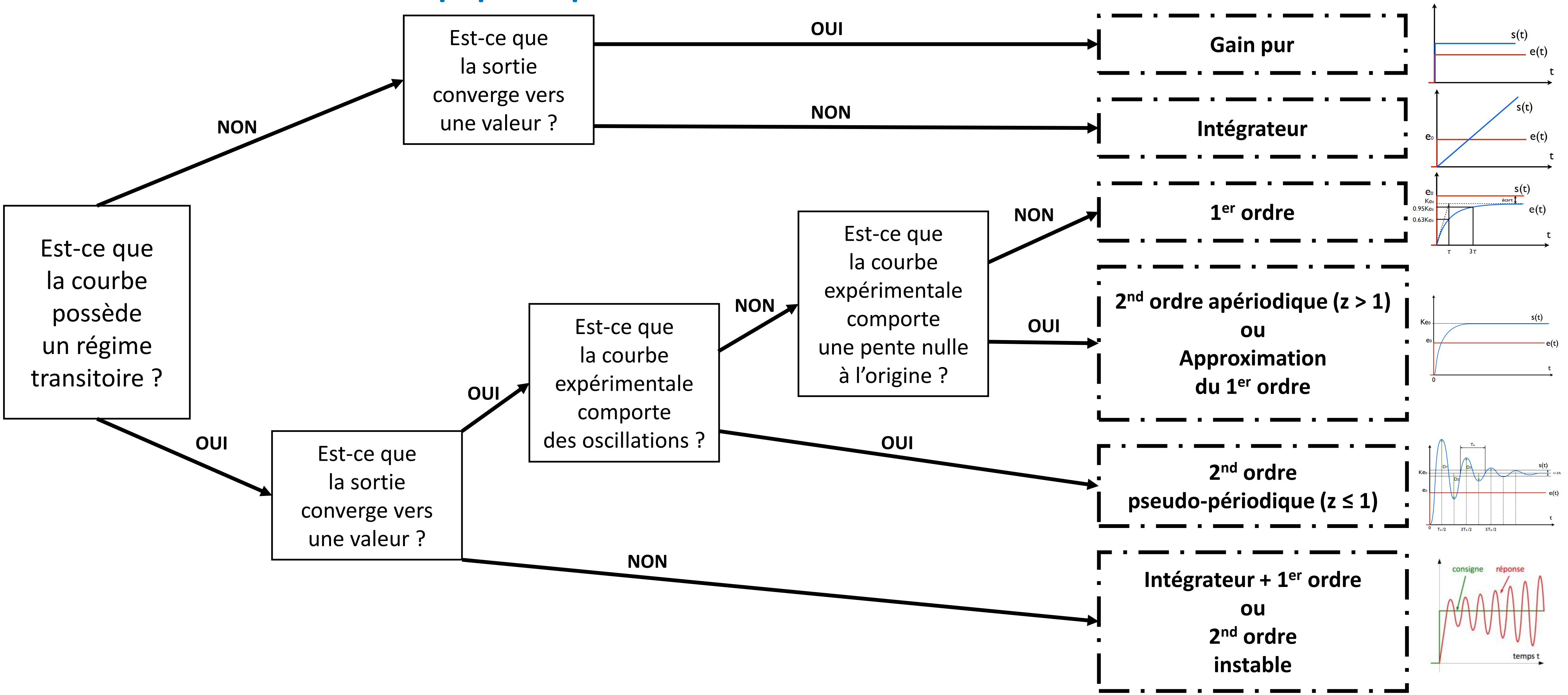
Systèmes du 1er et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

Avantages et inconvénients de la boucle de retour UNITAIRE

- Un 1er ou 2nd ordre bouclé par un retour unitaire → un 1er ou 2nd ordre mais **avec de nouveaux paramètres**
- Un 1er ou 2nd ordre bouclé par un retour unitaire → jamais une erreur nulle car $K_{BF} \neq 1$
- Augmentation du gain de la chaîne directe (K) pour un système bouclé par retour unitaire :
  - Améliorera la précision car $K_{BF} \rightarrow 1$
  - Un 1er ordre bouclé → plus rapide que ce 1er ordre sans bouclage ($\tau_{BF} < \tau$)
  - Un 2nd ordre bouclé → moins amorti que ce 2nd ordre sans bouclage car ($z_{BF} < z$)
  - Un 2nd ordre bouclé → plus rapide que ce 2nd ordre sans bouclage car (${\omega_0}_{BF} > \omega_0$)
- Augmentation du gain dans la chaîne directe (K) → problèmes de dépassements et de stabilité (voir 2ème année).

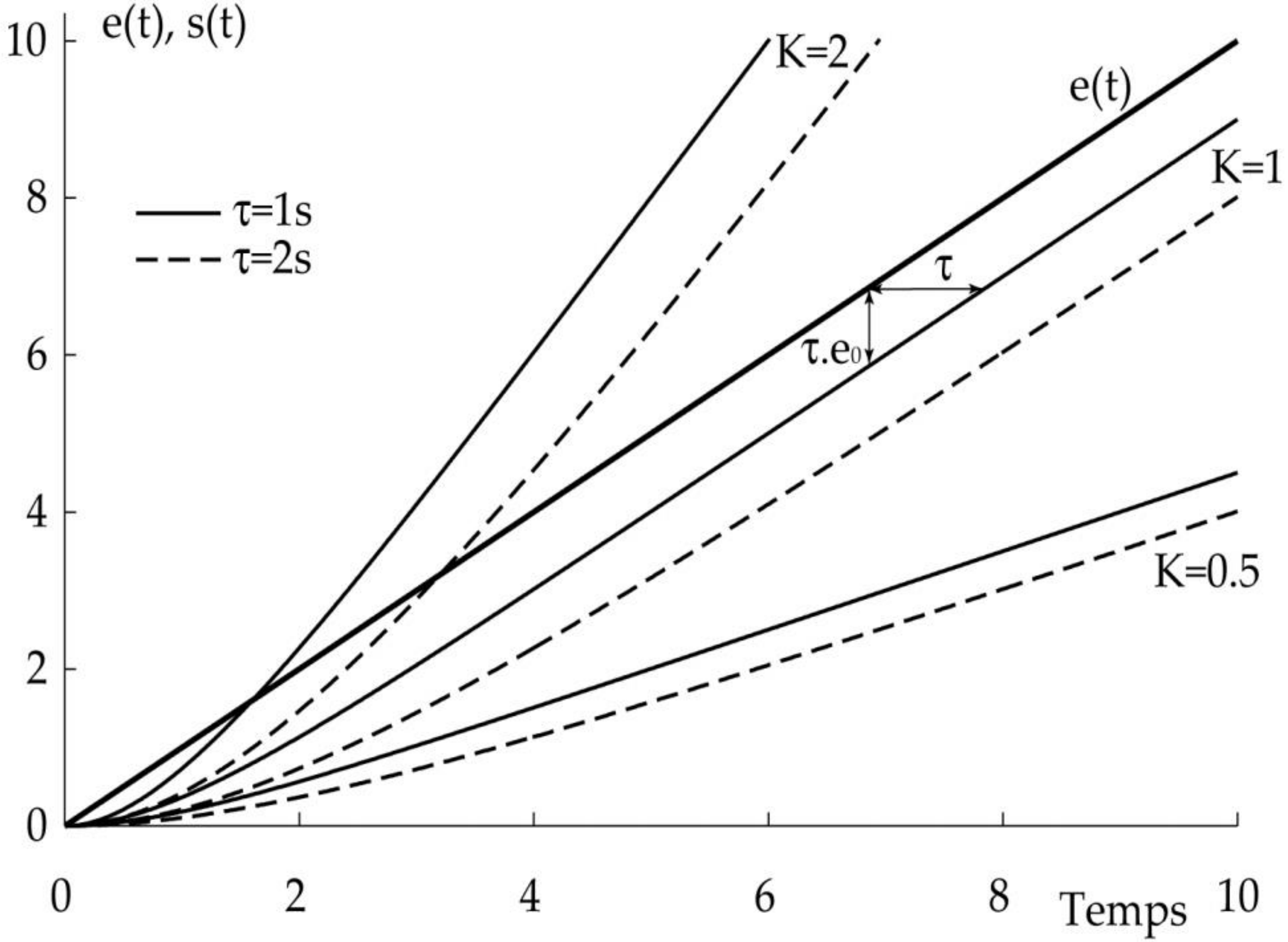
→ Nécessité de réaliser des **compromis entre précision-rapidité-stabilité**…

Choix du modèle de comportement lorsque l’on applique un échelon en entrée



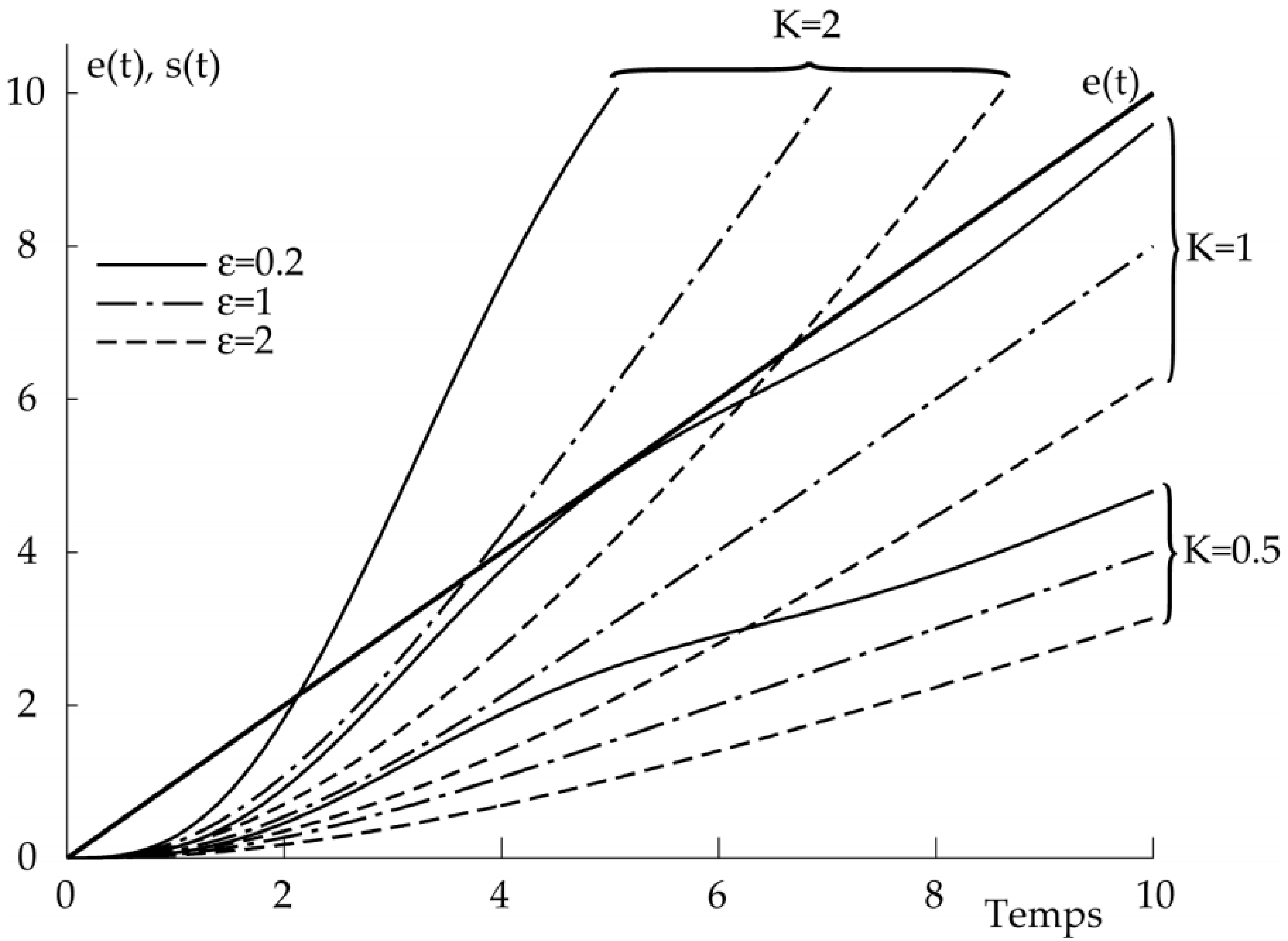
Réponses à d'autres signaux tests

Réponse d'un système du premier ordre à une entrée rampe



Réponses à d’autres signaux tests

Réponse d’un système du second ordre à une entrée rampe



Résumé de la démarche d’analyse

Système réel

Fonction du système

déplacement accélérateur δa(t) → **Permettre de se déplacer rapidement** → Vitesse du véhicule Va(t)

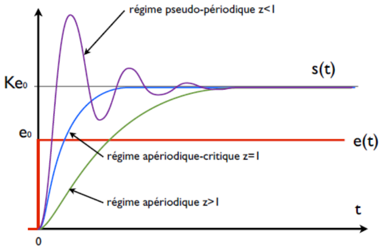
Equation différentielle

$$\alpha\frac{d^2Va}{dt^2}+\beta\frac{dVa}{dt}+\gamma Va=K.\delta a$$

Représentation dans le domaine de Laplace : Fonction de transfert

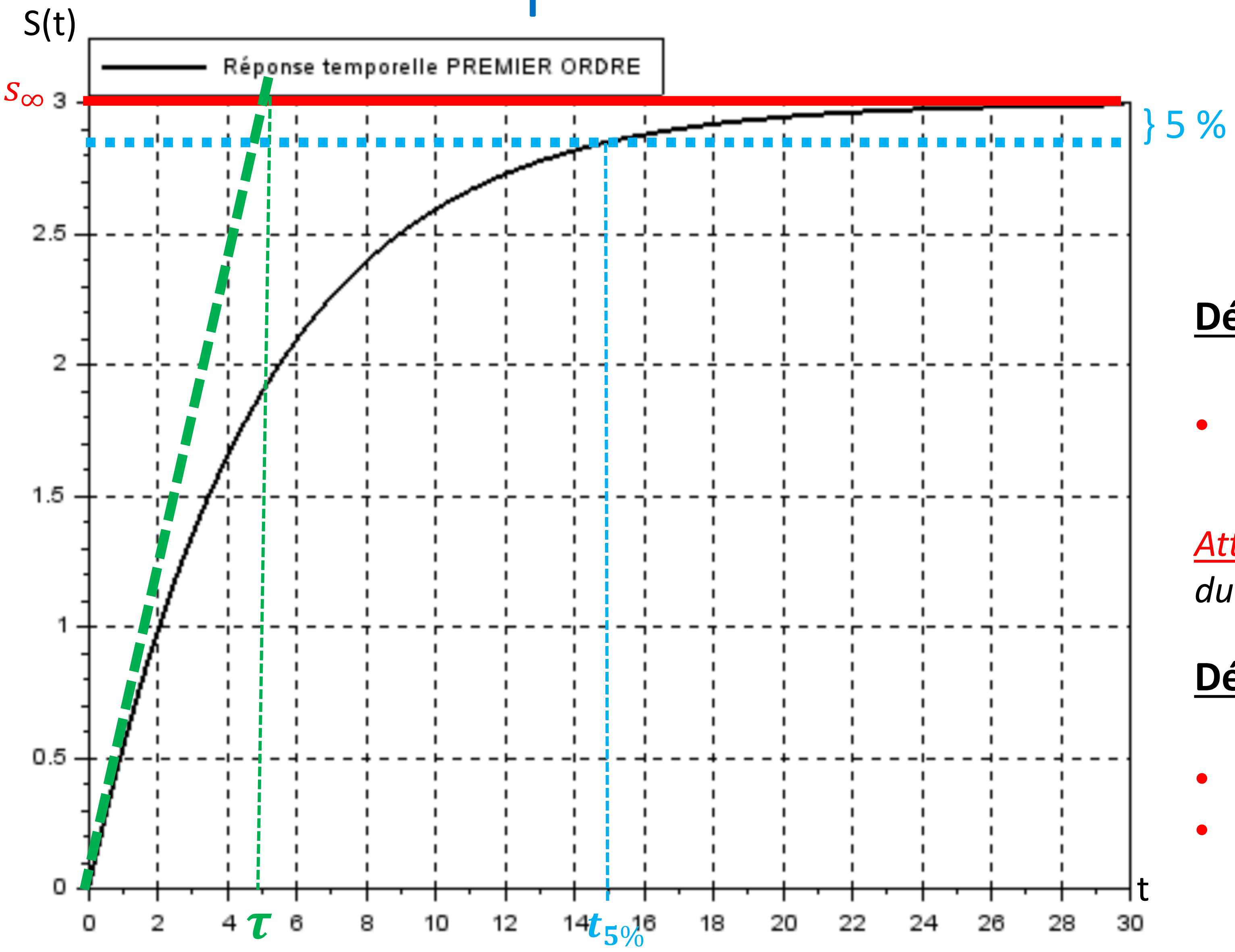
δa (p) → $H(p)=\frac{Va(p)}{\delta a(p)}=\frac{K}{\alpha p^2+\beta p+\gamma}$ → Va(p)

Etudes des réponses du système : évaluation des performances



Démarche d’analyse

Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

Pente à l'origine non nulle

Détermination de K :

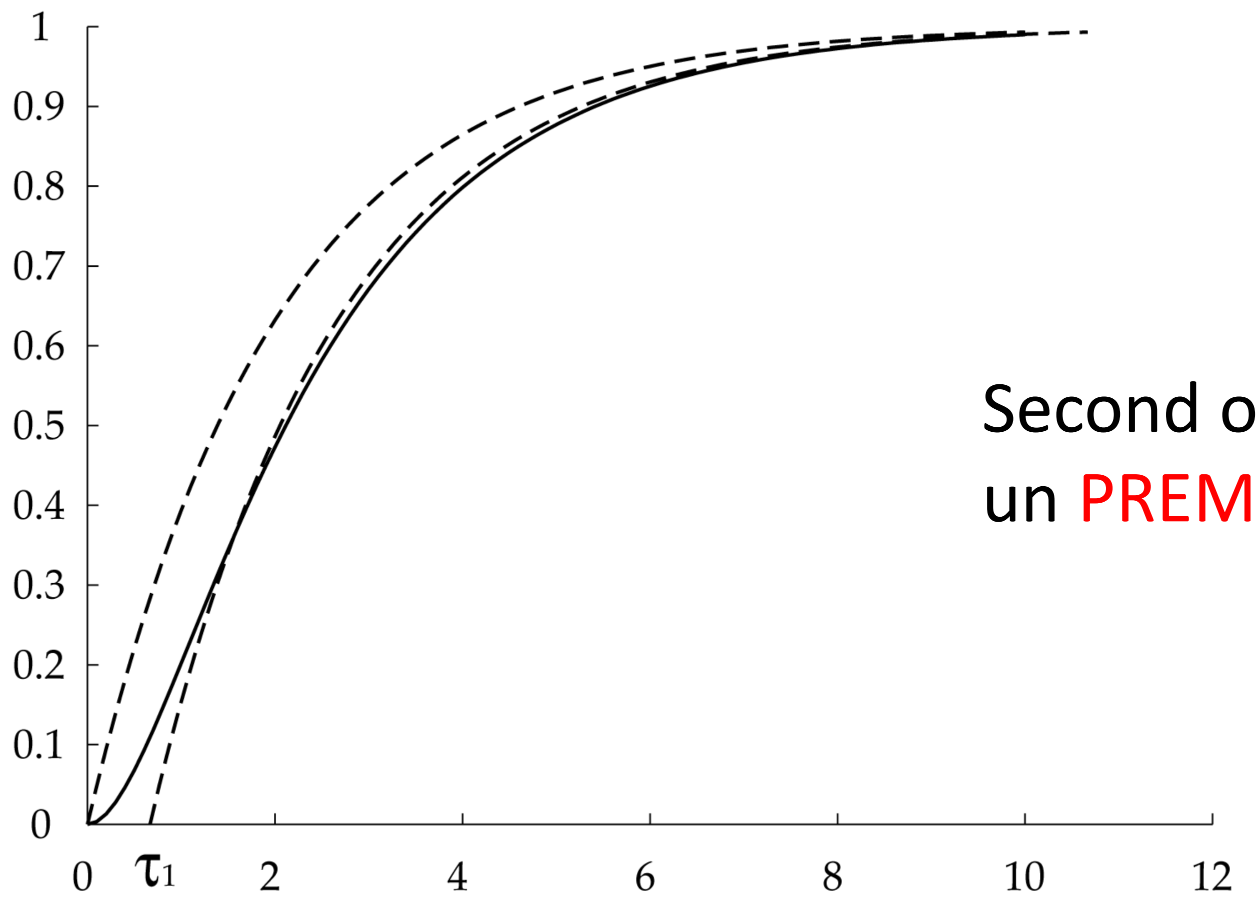
- $K = \frac{s_\infty}{e_0}$

Attention : Si l'on trace s(t)/e(t) en fonction du temps, K est alors directement la valeur finale

Détermination de τ :

- $t_{5\%} = 3.\tau$
- **La tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant t = τ**

Méthode de détermination graphique des paramètres d’une FT



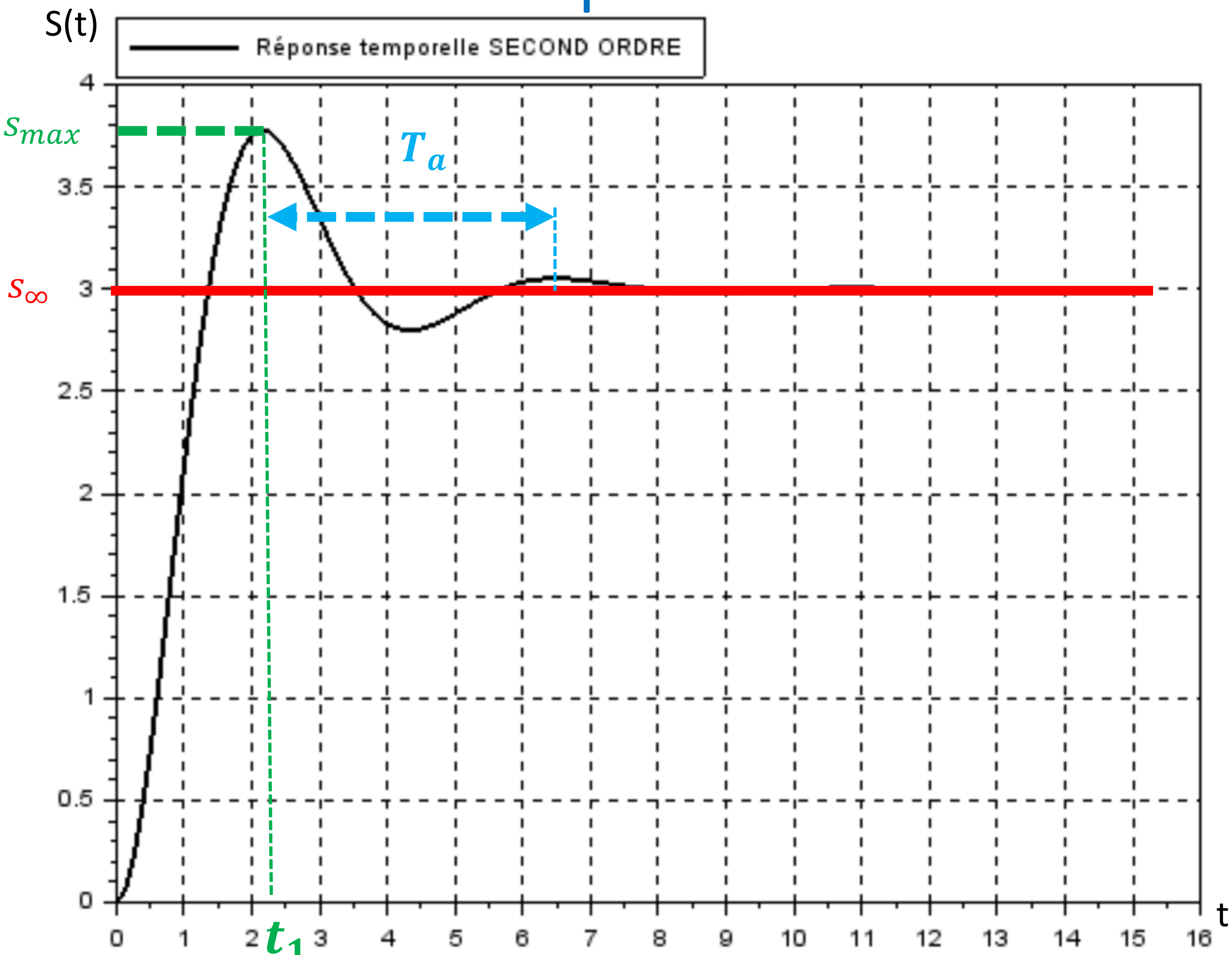
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Pente à l’origine nulle

Second ordre apériodique assimilable à un PREMIER ORDRE AVEC UN RETARD

$$s(t) \cong Ke_0\left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}}\right).u(t)$$

Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pente à l'origine nulle

Détermination de K :

- $K = \frac{s_\infty}{e_0}$

Attention : Si l'on trace s(t)/e(t) en fonction du temps, K est alors directement la valeur finale

Détermination de z :

- $z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}}$ avec $D_1 = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty}$

Détermination de ω_0 (après z):

- $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 . \sqrt{1 - z^2}}$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a . \sqrt{1 - z^2}}$